Die Logistik

und die

Trigonometrie der Griechen.

Mathematisch-historische Studie

als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doctorgrades der naturwissenschaftlichen Facultät der Universität Tübingen

vorgelegt

von

W. Horn,

kgl. Lehrer der Mathematik in München.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1877.

Die Logistik

und die

Trigonometrie der Griechen.

Mathematisch-historische Studie

als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doctorgrades der naturwissenschaftlichen Facultät der Universität Tübingen

vorgelegt

von

W. Horn,

kgl. Lehrer der Mathematik in München.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1877.

I. Einleitung.

Während die Kenntniss der Geometrie der Griechen allgemeine Verbreitung gefunden hat, findet man die Bekanntschaft mit dem rechnenden Theil der griechischen Mathematik verhältnissmässig nur bei Wenigen. Für diese Thatsache lässt sich leicht eine Erklärung angeben. Die geometrische Methode der Griechen und die in den Elementen Euklid's enthaltenen Sätze bilden bei allen modernen Culturvölkern die Eingangspforten zum Lehrgebäude der geometrischen Wissenschaften, die mühsamen und primitiven Rechnungsweisen der Griechen dagegen, nebst ihrer Trigonometrie, sind durch unser ungemein praktisches Zahlensystem, sowie durch die glänzende Ausbildung der modernen Trigonometrie (deren Uranfänge wir bei den Indern und Arabern zu suchen haben) so verdunkelt, dass nur Wenige daran denken, deren Betrachtung einige Aufmerksamkeit zu schenken. Zudem haben wir der Anwendung der eleganten und kräftigen Methoden unserer modernen Trigonometrie und Analysis auf Physik und Astronomie die grossen Entdeckungen in letzteren Wissenschaften zu verdanken, die Rechnungsweisen der Griechen aber sind nur noch von historischem Interesse. Während desshalb die Elemente Euklid's heutzutage in den Händen Aller sich befinden, welche sich mit Mathematik beschäftigen, sind die Quellen, aus welchen wir über den Zustand und das Wesen des rechnenden Theils der griechischen Mathematik Belehrung schöpfen können, nur spärlich verbreitet und sind nicht Allen zugänglich. Wenn ich desshalb in dieser Schrift versuchte, auf Grund der noch vorhandenen Werke griechischer Mathematiker eine systematische und übersichtliche Darstellung von dem Rechnungsverfahren und der trigonometrischen Methode derselben zu geben, so glaube ich, dass

sich dieser Versuch einigermassen rechtfertigen lassen wird, und wenn auch dadurch kein Einfluss auf unsere moderne Mathematik sich ergibt, so wird es doch dem Leser nicht uninteressant sein, die wenigen einfachen Hülfssätze und das Verfahren kennen zu lernen, das die alten Geometer und Astronomen zur Auflösung der Fälle benützten, welche sich ihnen bei der Dreiecksberechnung darboten.

Mit dem Worte *Ἀριθμητική* bezeichneten die Griechen nicht das Rechnen, sondern sie verbanden mit diesem Wort den Begriff, welchen wir mit Zahlentheorie bezeichnen, also die Erforschung der Eigenschaften der Zahlen. Das Rechnen bezeichneten sie mit dem Namen *Λογιστική* oder *λογιστικὴ τέχνη*.

Die griechischen Mathematiker deuteten in ihren Werken die Operationen nur an und setzten die vollständige Durchführung von Berechnungen nicht bei, da sie natürlich Leser voraussetzten, welche mit der Logistik vollkommen vertraut waren. Aus ihren Werken können wir desshalb das von ihnen eingeschlagene logistische Verfahren nicht erkennen. Glücklicherweise erläuterten aber spätere Schriftsteller, welche Commentare zu einigen dieser Werke verabfassten, dieses Verfahren, indem sie die vollständig durchgeführten Rechnungen in ihren Commentaren beisetzten, und dadurch sind wir im Stande, uns über die Logistik Aufklärung zu verschaffen.

Pappus (um 400 n. Chr. in Alexandria) hat in seiner Collectio mathematica die Logistik speziell und systematisch behandelt, der hierauf bezügliche Theil dieses Werkes aber ist verloren gegangen. Nur ein Fragment davon, welches eine von dem Geometer Apollonius (240 v. Chr.) erfundene Multiplicationsmethode behandelt, fand der englische Mathematiker Wallis (1616--1703) noch vor und publizirte dasselbe im dritten Band seiner Werke.

Eutokius von Askalon in Palästina, welcher im sechsten Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebte, schrieb einen Commentar zur Kreismessung (*κύκλου μέτρησις*) des Archimedes. Ich benützte die von Gutenäcker (Würzburg 1825) bearbeitete

Ausgabe der *κύκλου μέτρησις* und des dazu gehörigen Commentars. Eutokius hat mehrere von Archimedes blos angedeutete Rechnungen wirklich ausgeführt, so dass wir aus diesem Commentar das Verfahren der Griechen bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation recht gut ersehen können. Die von Archimedes angezeigten Divisionen und Quadratwurzelausziehungen hat Eutokius nicht ausgeführt; er begnügt sich die Richtigkeit der von Archimedes angegebenen Wurzelwerthe durch Erheben derselben in's Quadrat nachzuweisen.

Eutokius führt am Ende seines Commentars (v. A. v. Gutenäcker pag. 116) auch einen gewissen Magnus an, welcher eine Logistik schrieb; dieselbe ist aber verloren gegangen.

Theon von Alexandrien verfasste gegen Ende des vierten Jahrhunderts seinen Commentar zu dem berühmten Almagest des Ptolemäus. Durch diesen Commentar lernen wir das Sexagesimalsystem des Ptolemäus, sowie die von den Griechen befolgte Methode des Dividirens und Ausziehens der Quadratwurzeln kennen.

Auf Grund dieser Autoren verfasste Delambre im zweiten Band seiner Histoire de l'astronomie ancienne, welche 1817 zu Paris erschien, ein mit Arithmétique des Grecs überschriebenes Capitel, auf welches drei weitere Capitel folgen, welche von der Trigonometrie der Griechen handeln. Delambre weicht aber öfters in seiner Darstellung von dem Geist und der Auffassungsweise der Alten zu stark ab; er führt uns dieselben gleichsam in modernem Gewand vor.

Bezüglich der mathematischen Schriften der Griechen, welche über Trigonometrie handeln, ist Folgendes zu bemerken:

Die Idee, zur Berechnung der Dreiecke sich der Sehnen zu bedienen, ging unstreitig von Hipparch (150 v. Chr. in Alexandrien) aus. Theon berichtet uns, dass Hipparch eine Schrift verfasste, welche die Lehre von den Sehnen in 12 Büchern enthielt, und dass später Menelaus (80 n. Chr. in Alex.) über denselben Gegenstand eine Abhandlung von 6 Büchern schrieb. Beide Werke aber sind verloren.

Ausserdem schrieb Menelaus noch ein aus 3 Büchern bestehendes Werk, welches *Σφαιρικά* betitelt ist und über sphärische

Dreiecke handelt. Dieses Werk wurde von den Arabern in ihre Sprache übersetzt, und auf Grund dieser arabischen Uebersetzung erschien dieses Werk des Menelaus zu Oxford 1758 in einer lateinischen Ausgabe. Ebenso haben wir noch von Theodosius (50 v. Chr.) ein Buch, betitelt: *Σφαιρικῶν βιβλ. γ*, von welchem zu Oxford 1707 eine Ausgabe, und von Nizze 1826 eine deutsche Uebertragung erschien. Aber in beiden Werken ist über die Sehnentafel und die Dreiecksauflösung des Hipparch vollständiges Stillschweigen beobachtet.

Die einzigen Werke, aus welchen wir über die Dreiecksberechnung der Griechen gründliche Einsicht schöpfen können, sind: die *Μεγάλη Σύνταξις* des Alexandriner Astronomen Claudius Ptolemäus (150 n. Chr.) und der dazugehörige Commentar des Theon. Diese auch unter dem Namen Almagest bekannte *Μεγάλη Σύνταξις* enthält die vollständige und systematische Darstellung der Astronomie der alexandrinischen Schule und ist auch wegen der darin aufgezeichneten astronomischen Beobachtungen eines der schätzbarsten Monumente des Alterthums. Im ersten Buch Cap. IX und XI dieses Werkes sind die allgemeinen Sätze dargelegt, auf welche sich die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke gründet. Die einzelnen Fälle, welche bei der Auflösung der ebenen und sphärischen Dreiecke vorkommen können, sind zwar nicht besonders behandelt, aus den zahlreichen Beispielen jedoch, welche in diesem Werk vorkommen, können wir leicht auf die angewandte Methode schliessen*).

Das Verdienst des Ptolemäus in der Trigonometrie besteht nach dem Ausspruch Theons in der Vereinfachung und Vervollkommnung der von seinen Vorgängern Hipparch und Menelaus erhaltenen Lehren.

---

*) In dem Jahresbericht des k. Gymn. zu Essen für 1839 befindet sich eine sehr schätzenswerthe Abhandlung: Zur sphär. Trig. der Griechen von Dr. Wilberg. In derselben sind die allgemeinen Sätze aus Cap. XI im ersten Buche des Almagest angegeben, aber die Anwendung derselben auf die einzelnen Fälle des rechtwkl. sphär. Dreiecks fehlt. Wilberg geht von den allgemeinen Sätzen sofort zur Behandlung einiger dem Almagest entnommenen Beispiele und zeigt die numerische Auflösung derselben.

Die trigonometrischen Lehren sind von Ptolemäus durchgängig in der Form von geometrischen Sätzen vorgetragen; erst bei den Arabern nehmen sie den Charakter von algebraischen Formeln an. Dass die trigonometrischen Rechnungen der Griechen verwickelter waren als die unsrigen, liegt in der Anwendung der Sehnen und in ihrer Logistik. In jedem ebenen Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sehnen der doppelten Gegenwinkel. Bei Anwendung der Sehnen ist also die Verdoppelung der Winkel des △s nothwendig. Die Umständlichkeit dieser Operation veranlasste später die Araber, die halben Sehnen (sinus**) einzuführen.

II. Zahlzeichen und Numeriren.

Die Griechen bezeichneten ihre Zahlen auf folgende Weise:

$\alpha = 1$	$\iota = 10$	$\varrho = 100$
$\beta = 2$	$\varkappa = 20$	$\sigma = 200$
$\gamma = 3$	$\lambda = 30$	$\tau = 300$
$\delta = 4$	$\mu = 40$	$\upsilon = 400$
$\varepsilon = 5$	$\nu = 50$	$\varphi = 500$
ϛ = 6	$\xi = 60$	$\chi = 600$
$\zeta = 7$	$o = 70$	$\psi = 700$
$\eta = 8$	$\pi = 80$	$\omega = 800$
$\vartheta = 9$	ϟ = 90	ϡ = 900

**) Das arabische Wort für sinus ist gaib (spr. dschaib), welches Busen bedeutet, also ganz richtig mit sinus übersetzt wurde. Wie sind die Araber zu dieser seltsamen Bezeichnung einer trigonometr. Funktion gelangt? Wahrscheinlich liegt hier ein Missverständniss von Seite der Araber vor. Es haben nämlich Munk und Wöpcke (Journ. as. VI sér. t. I. p. 488) bemerkt, dass die beiden Wörter gībă und gaib im Arabischen mit denselben Buchstaben geschrieben werden; denn das ă im ersteren fällt in der arabischen Schrift ganz aus; ī und ai sind aber in der Schrift gar nicht von einander verschieden.

Ob also jene Zeichengruppe auf die eine oder andere Weise zu lesen sei, kann nur das Herkommen entscheiden. Nun aber heisst der sinus im Sanskrit gīvā oder gyā (= Sehne eines Bogens). Die ersten Araber, welche den sinus durch mündlichen Unterricht von den Indern erhielten, mochten auch

Wie man sieht, wurden die Buchstaben des Alphabets zur Bezeichnung der Zahlen benützt. Ausser diesen Buchstaben treten noch drei Zeichen, nämlich ϛ ϟ ϡ auf, welche sich im griechischen Alphabet nicht befinden.

Diese drei Zeichen sind dem phönikischen Alphabet entnommen, aus welchem die Griechen das ihrige gebildet hatten, und da diese Zeichen zur Bezeichnung von Lauten in der griechischen Sprache überflüssig waren, wurden sie von den Griechen als Zahlzeichen benützt. (Ausführlichere Belehrung über diesen Punkt gibt: Kirchhoff „Studien zur Geschichte des griechischen Alphabets." Berlin 1869.)

Um die Tausender zu bezeichnen, setzte man den Zeichen für die Einer links unten einen Strich vor, so dass also ,α = 1000, ,ϑ = 9000 bedeutet. Die Griechen hätten durch die 27 oben angegebenen Zeichen dieses System bis ,ϡ, also bis 900000 fortsetzen können. Dieses thaten sie jedoch nicht, sondern sie führten für Zehntausend ein neues Zeichen *M* oder auch *Mv* ein.

Die Zehntausender (*μυριάδες*) wurden bei Archimedes und Eutokius auf folgende Weise bezeichnet: $\overset{\alpha}{M}$ = 10000, ... $\overset{\vartheta}{M}$ = 90000; hundert Myriaden geben eine Million $\overset{\varrho}{M}$; die Bezeichnungsweise der Myriaden kommt jedoch bei einigen Geometern auch in etwas abgeänderter Form vor.

Bei Aristarch (v. A. de magnit. et dist. solis et lunae prop. 18) wird z. B. die Zahl 79507 mit *Mζ*,ϑφζ bezeichnet, ebendaselbst ist *Mκα*,ϛ = 216000. Pappus und Diophant bedienen sich zur Bezeichnung der Myriade der beiden Buchstaben *Mv*, bei diesen bedeutet also z. B. *βMv* die Zahl 20000; ,εσκδ*Mv*,ϑϱϟ = 52249190, sie setzen auch wohl an die Stelle des Zeichens *Mv* einen Punkt und bezeichnen letztere Zahl durch ,εσκδ.,ϑϱϟ. Das Zeichen M^0 bedeutet bei Diophant und Eutokius Einheiten, so dass also $M^0 \mu\vartheta$ = 49 ist.

---

seinen Namen acceptiren und gîba schreiben. Als sich aber später die Tradition von dem Ursprung dieser Bezeichnung verlor, arabisirte man das Wort und las jene Zeichen mit den Vokalen des Wortes gaib. (Hankel, zur Geschichte der Math. in Alterthum und Mittelalter pag. 280 Anmerk. †.)

Den Gebrauch unserer Null in Verbindung mit anderen Ziffern zur Veränderung des Werthes der letzteren kannten die Griechen nicht; bei ihnen hat desshalb jede Ziffer ihren eigenen Werth, welcher ganz unabhängig ist von der Stelle, an der sie steht. In Ptolemäus' Almagest kommt jedoch ein unserer Null sehr ähnliches Zeichen, nämlich ō, für sich allein vor, und Ptolemäus drückt damit in seinem Sexagesimalsystem (v. V.) eine fehlende Ordnung aus. Jedenfalls ist bei Ptolemäus das Zeichen ō die Abkürzung von *οὐδέν* (nichts).

Nach griechischer Bezeichnungsweise würde z. B. die Länge der Kreisperipherie, deren Durchmesser eine Myriade der zweiten Ordnung ist, ausgedrückt durch: *γ. ανιε. ϑοξε* = 314159265.

Wir finden in den griechischen Schriften nur wenige Fälle, in denen Zahlen vorkommen, welche über die Myriade der zweiten Ordnung hinausgehen. Archimedes stellt sich in seiner Sandrechnung (*ψαμμίτης*) die Aufgabe: Eine Zahl zu bestimmen, welche grösser ist als die Anzahl der Sandkörner, die in einer Kugel enthalten sind, deren Radius der Abstand der Erde von der Fixsternsphäre ist. Dieses führte den Archimedes auf eine Zahl, welche in unserem dekadischen Zahlensystem mit 64 Ziffern geschrieben wird. Archimedes theilt hier nach Oktaden ab, d. h. die erste Klasse (Oktade) geht von der Einheit zur Myriade der Myriaden.

Diese Zahl, also 100000000 bildet die Einheit der zweiten Ordnung. Die Einheit der dritten Ordnung ist die Zahl, welche wir mit 1 und sechzehn angehängten Nullen schreiben. Den Durchmesser der Fixsternsphäre nimmt Archimedes nach Aristarch kleiner als zehntausend Millionen Stadien an (*ἐλάττων ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες* $\overline{\varrho}$).

Ferner besitzen wir ein Fragment aus einer Schrift des Pappus, in welchem eine Multiplicationsmethode des Apollonius von Pergä mitgetheilt wird (v. I). Hierin werden alle Zahlen mit einander multiplicirt, welche durch die Buchstaben der beiden folgenden Verse:

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον, ἐννέα κοῦραι.
Μῆνιν ἄειδε θεὰ Ληιήτερος ἀγλαοκάρπου.

vorgestellt sind. Das Hauptprodukt ist die Zahl 21849440256

mit achtundzwanzig angehängten Nullen. Um dieses Produkt übersehen zu können, theilte es Appollonius in Tetraden ab. Im Princip aber ist diese Abtheilungsweise des Apollonius von der des Archimedes nicht verschieden, denn zwei Tetraden des Apollonius geben eine Oktade des Archimedes. In unserem dekad. Zahlensystem, in welchem eine konsequent durchgeführte Bezeichnung für kleine wie für die grössten Zahlen gilt, bereitet das Rechnen mit grossen Zahlen keine besondere Schwierigkeit; den Griechen jedoch war die Bezeichnung von Zahlen, welche über die Myriade hinausgingen, sowie das Rechnen mit solchen Zahlen, unbequem, und es ist daher die Sandrechnung hauptsächlich desshalb bemerkenswerth, weil in derselben Archimedes einen Weg bahnte, um seinen Zeitgenossen solche Zahlen anschaulich zu machen, welche über ihre gewöhnlichen Begriffe weit hinausgingen.

Die Brüche wurden folgendermassen bezeichnet:

Bei Brüchen, deren Zähler 1 ist, wurde nur der Nenner, versehen mit einem oben rechts angefügten Strich (Apex), angeschrieben. z. B. $\frac{1}{4} = \delta'$; $\frac{1}{190} = \varrho\text{ϟ}'$; für den Bruch $\frac{1}{2}$ hatte man ein besonderes Zeichen, nämlich ꝛ oder auch ꝁ. Bei Brüchen, deren Zähler nicht 1 ist, wurde dieser angeschrieben, und der Nenner rechts oben (gleichsam als Exponent) beigefügt, z. B. $\frac{18}{37} = \iota\eta^{\lambda\zeta}$; $\frac{541324}{5041} = \nu\delta._{,}\alpha\tau\kappa\delta^{,\varepsilon\mu\alpha}$.

Bei Ptolemäus werden Brüche, deren Nenner um die Einheit grösser ist als der Zähler, folgendermassen angedeutet:

$$2 \text{ Theile} = \frac{2}{3};\ 3 \text{ Theile} = \frac{3}{4};\ \ldots\ldots\ n \text{ Theile} = \frac{n}{n+1}.$$

Gewöhnlich zerlegen die griechischen Mathematiker ihre Brüche in eine Summe von Brüchen, deren Zähler die Einheit ist, z. B. statt $\frac{33}{64}$ wird $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{64}$, statt $\frac{3}{4}$ wird $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ gesetzt. Diese Zerlegung wird selbst dann vorgenommen, wenn dadurch der Werth des ursprünglichen Bruches nicht ganz genau

ausgedrückt wird. So stellt Eutokius den Bruch $\frac{15}{64}$ annähernd durch die Summe von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{15}$ dar; vielleicht ist er auf folgendem Weg zu dieser Zerlegung gelangt:

$$\frac{15}{64} = \frac{45}{192} = \frac{32 + 13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14\frac{10}{13}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}.$$

III. Addition und Subtraction.

Um die im Folgenden gegebenen Beispiele leichter verständlich zu machen, setze ich neben jede, mit griechischer Bezeichnungsweise gegebene Rechnung dieselbe mit arabischen Ziffern, aber im griechischen Geiste durchgeführt. E bedeutet Einer, Z Zehner, ... M Zehntausender.

Das Verfahren bei der Addition und Subtraction wird sofort aus einigen Beispielen klar werden:

Additionsbeispiel:

		M	T	H	Z	E
$\xi\gamma$. $\alpha\nu\nu\beta$		63	.	1	4	5 2
π . $\varphi\varkappa$		8	.		5	2
$\varrho\beta$. $\vartheta\varrho\iota\eta$		1 2	.	9	1	1 8
$\sigma\mu\varsigma$. $\alpha\lrcorner$		246	.	1	0	9 0

Subtractionsbeispiel (entnommen aus Eutok. Comm. Ausg. von Gutenäcker pag. 84):

	M	T	H	Z	E
$\overset{\vartheta}{M}\gamma\chi\lambda\varsigma$	9	3	6	3	6
$\overset{\beta}{M}\gamma\nu\vartheta$	2	3	4	0	9
$\overset{\zeta}{M}\sigma\varkappa\zeta$	7	0	2	2	7

IV. Multiplication.

Die in Eutokius Commentar angegebenen Multiplicationen sind in der Absicht ausgeführt, den Nachweis zu liefern, dass die von Archimedes angegebenen Quadratwurzeln entweder vollständig genau sind, oder der Wahrheit hinreichend nahe kommen. Zu diesem Zweck erhebt Eutokius die von Archimedes angegebene Wurzel durch Multiplication mit sich selbst ins Quadrat.

Die Multiplicationsmethode der Griechen ist ähnlich derjenigen, welche wir anwenden, um zwei algebraische Polynomien mit einander zu multipliciren. Man bildet die Theilprodukte, dann addirt man die gleichartigen derselben und ordnet.

$\varphi o \alpha$	571
$\varphi o \alpha$	571
$\varkappa\varepsilon\ \gamma$ $M M M_{,}\varepsilon\varphi$	250000
	35000
	500
$\overset{\gamma}{M}_{,}\varepsilon_{,}\delta\sigma o$	35
	4900
	70
$\varphi o \alpha$	571
$\overset{\lambda\beta}{M}_{,}\varsigma\mu\alpha$	326041

Folgendes Beispiel, welches die Multiplication mit Brüchen behandelt, ist aus Eutok. Comm. (Ausg. v. Gutenäcker pag. 106) genommen:

$_{,}\alpha\omega\lambda\eta\ \ \vartheta^{\iota\alpha}$	$1838\frac{9}{11}$
$_{,}\alpha\omega\lambda\eta\ \ \vartheta^{\iota\alpha}$	$1838\frac{9}{11}$
	1000000
$\varrho\ \pi\ \gamma$ $M M M_{,}\eta\omega\iota\eta\ \ \beta^{\iota\alpha}$	8
	3
	8
	$818\frac{2}{11}$
	8
$\pi\ \xi\delta\ \beta$ $M M M_{,}\delta_{,}\varsigma\upsilon\chi\nu\delta\ \ \varsigma^{\iota\alpha}$	64
	24
	64
	$654\frac{6}{11}$

$\overset{\gamma}{M}\overset{'\beta}{M}{}_{,}\delta\text{ϡ}\sigma\mu\kappa\delta$	$\varsigma^{\iota\alpha}$	30000 24 9 240 $24\frac{6}{11}$
${}_{,}\eta{}_{,}\varsigma\upsilon\sigma\mu\xi\delta\varsigma$	$\varsigma^{\iota\alpha}$	8 64 240 64 $6\frac{6}{11}$
$\omega\iota\eta$	$\beta^{\iota\alpha}$	. . $818\frac{2}{11}$
$\chi\nu\delta$	$\varsigma^{\iota\alpha}$	. . $654\frac{6}{11}$
$\kappa\delta$	$\varsigma^{\iota\alpha}$	. . $24\frac{6}{11}$
ς	$\varsigma^{\iota\alpha}$	. . $6\frac{6}{11}$
	$\pi\alpha^{\varrho\kappa\alpha}$	. . $\frac{81}{121}$
$\overset{\tau\lambda\eta}{M}{}_{,}\alpha\sigma\nu\beta$	$\lambda\zeta^{\varrho\kappa\alpha}$	$3381252\frac{37}{121}$

Multiplicationen ungleicher Faktoren kommen bei Eutokius nicht vor, jedoch ist klar, dass sie genau ebenso wie die Multiplicationen zweier gleicher Faktoren durchgeführt werden können.

V. Das Sexagesimalsystem des Ptolemäus.

In Eutokius' Commentar befinden sich weder Beispiele für die Division, noch für das Ausziehen der Quadratwurzeln. Beispiele über diese beiden Rechnungsarten treffen wir in dem Commentar, welchen Theon von Alexandrien zum Almagest schrieb. Bei Ptolemäus aber, sowie in dessen Commentar werden alle Rechnungen an Grössen vorgenommen, welche nach dem Sexagesimalsystem getheilt sind.

Die Einführung dieses Systems geht bis in das früheste Alterthum zurück, denn wir finden in babylonischen und assyrischen Inschriften z. B den Bruch $\frac{1}{2}$ einfach durch 30, den Bruch $\frac{1}{6}$

durch 10 bezeichnet, wo man sich natürlich den Nenner 60 hinzu zu denken hat*). Auf dieses System wurden jene alten Völker wahrscheinlich durch die Beobachtung der Sonne geführt. Sie gelangten nämlich zur Einsicht, dass die Sonne ohngefähr 360 Tage braucht, um am Himmelsgewölbe zu demselben Ort ihrer Bahn zurückzukehren. Diese Bahn wurde nun von jenen Völkern als kreisförmig erkannt, und somit erklärt sich die Theilung des Kreises in 360 gleiche Theile. Die Theilung des Jahres in vier Jahreszeiten gab Veranlassung zu den vier Quadranten des Kreises. Durch Vergleichung des Mondlaufes mit der Sonnenbahn wurde man bestimmt, letztere in 12 gleiche Theile (die Thierkreiszeichen) abzutheilen.

Ptolemäus übernahm das sexagesimale System von den Babyloniern und führte alle Rechnungen in seinem Almagest mit Hilfe dieses Systems aus. Nach ihm sind die Sexagesimalbrüche bei den Astronomen bis in's 16. Jahrhundert in Anwendung geblieben, von wo an die Einführung der Dezimalbrüche datirt.

Jedes Ganze (*μοιρά*) wird als ein Grad betrachtet. Es wird sexagesimal in Minuten (*ἑξηκοστὰ πρῶτα*), Sekunden (*ἑξηκοστὰ δεύτερα*), Tertien und Quarten getheilt. Ptolemäus bezeichnet die Ganzen durch einen über dieselben gesetzten horizontalen Strich. Erst später wurde anstatt dieses Striches der Exponent Null eingeführt. Das Fehlen einer Stufe deutet Ptolemäus durch ein unserer Null ähnliches Zeichen ($\overline{o}$) an, z. B.:

$$\overline{\lambda\zeta}\ \delta'\ \nu\varsigma'' = 37^{\mathrm{p}}\ 4'\ 56''; \quad \overline{\gamma}\ \overline{o}'\ \varkappa\alpha'' = 3^{\mathrm{p}}\ 0'\ 21''$$

Da der Centriwinkel des regulären Sechseckes 60 Theile des Kreisumfangs beträgt, so fand man es bequem, die Seite dieses Sechseckes (den Kreisradius) in ebensoviele Theile zu theilen. Der Radius des Kreises hat also bei Ptolemäus $60^{\mathrm{p}} = 3600' = 216000''$.

Setzt man den Durchmesser des Kreises = 1 so ist in unserem dekadischen System die Seite des dem Kreis eingeschriebenen regulären Zehnecks = 0,30902. Ptolemäus setzt den Durchmesser = 120 und findet für die Länge der Zehnecksseite $37^{\mathrm{p}}\ 4'\ 55''$ dieses Durchmessers.

---

*) J. Brandis, das Münz-, Maass- und Gewichtswesen in Vorderasien. Berlin 1866. 1. Abschn.

Ptolemäus gibt als Grund für seine Annahme des sexagesimalen Systems an (v. Al. Ausg. v. Halma, Paris 1816 pag. 26): die Vermeidung von unbequemen Brüchen; und er sagt, dass er bei den Multiplicationen und Divisionen stets die am meisten genäherten Resultate nimmt, in der Weise, dass dasjenige, was vernachlässigt wird, die hinreichende Genauigkeit des Resultates nicht beeinflusst. Theon setzt in seinem Commentar hinzu, dass 60 die bequemste aller Zahlen sei, indem sie bei ziemlicher Kleinheit doch eine grosse Anzahl von Theilern habe.

Bei der Multiplicaton der Sexagesimalbrüche von verschiedenen Ordnungen hat man vor Allem auf die Art (Benennung) des Produkts Obacht zu geben und zu bedenken, dass z. B. Minuten (d. h. $\frac{1}{60}$ der Einheit, also ein Stammbruch erster Ordnung) mit Minuten multiplicirt einen Stammbruch zweiter Ordnung (hundertzwanzigstel der Einheit) folglich Sekunden geben.

Nach diesen Auseinandersetzungen führe ich hier einige Beispiele, aus welchen die Rechnungsweise mit Sexagesimalbrüchen klar hervorgeht, an:

Beispiel für die Subtraction von Sexagesimalgrössen:

α^0	$\nu\eta^{\mathrm{I}}$	$\iota\varsigma^{\mathrm{II}}$	$\lambda\delta^{\mathrm{III}}$	$\varkappa\varsigma^{\mathrm{IV}}$	$\varkappa\varepsilon^{\mathrm{V}}$	β^{VI}	1^0	58^{I}	16^{II}	34^{III}	26^{IV}	25^{V}	2^{VI}
	$\mu\delta$	$\varkappa\alpha$	$\iota\beta$		$\nu\delta$	$\nu\delta$	$\varkappa\gamma$	0	44	21	12	54	54	23
α	$\iota\gamma$	$\nu\varepsilon$	$\varkappa\alpha$		$\lambda\alpha$	λ	$\lambda\vartheta$	1	13	55	21	31	30	39

Multiplicationsbeispiel von Sexagesimalgrössen:

Theon stellt sich in seinem Commentar (v. ed. Bas. p. 42) die Aufgabe, die Seite des (oben erwähnten) Zehnecks in's Quadrat zu erheben. Hier folgt das Schema der von ihm ausgeführten Rechnung:

$\overline{\lambda\zeta}$	δ'	$\nu\varepsilon''$	37^0	$4'$	$55''$
$\overline{\lambda\zeta}$	δ'	$\nu\varepsilon''$	37^0	$4'$	$55''$
$\overline{\alpha\tau\xi\vartheta}$	$\varrho\mu\eta'$	$\beta\lambda\varepsilon''$	1369^0	$148'$	$2035''$
	$\varrho\mu\eta$	$\iota\varsigma''$		148	$16\ 220'''$
					$2035\ 220\ 3025''''$

Um die Theilprodukte zusammenzufassen, sagt Theon: „Wenn wir vorerst die $3025''''$ durch 60 dividiren, so erhalten wir $50'''$ und $25''''$; ebenso geben die Tertien, welche mit den aus der

Division der Quarten hervorgegangenen $50'''$ zusammen $490'''$ betragen, $8''\ 10'''$; ferner die Sekunden, zusammen $4094''$, geben $68'$ und $14''$; endlich die Minuten, zusammen 364, geben $6^0\ 4'$; und das Resultat ist $1375^0\ 4'\ 14''\ 10'''\ 25''''$; da Ptolemäus nur noch die Sekunden berücksichtigt, so nimmt er $1375^0\ 4'\ 14''$ (als Hauptprodukt) an und vernachlässigt die Tertien und Quarten''. In folgendem Schema ist diese Aufgabe übersichtlich und klar ausgeführt:

$37^0 \,.\, 37^0 = 1369^0$
$37 \,.\, 4' = 2\ 28'$ (eigentlich $37^0 \,.\, \frac{4}{60} = 2\frac{28}{60} = 2^0\,28'$)
$37 \,.\, 55'' = 33'\ 55''$
$4' \,.\, 37^0 = 2\ 28$
$4' \,.\, 4' = 16''$ (eigentlich $\frac{4}{60}^0 \cdot \frac{4}{60} = \frac{16}{60^2}^0 = 16''$)
$4' \,.\, 55'' = 3\ 40'''$
$55'' \,.\, 37^0 = 33'\ 55''$
$55'' \,.\, 4' = 3\ 40$
$55'' \,.\, 55'' = 50\ 25''''$

$1375^0\ 4'\ 14''\ 10'''\ 25''''$

Das Verfahren, welches Theon bei der Division von Sexagesimalgrössen einschlägt, geht aus folgendem Schema, welches im Geiste Theon's, wenn auch mit modernen Ziffern, durchgeführt ist, hervor:

$(1515^0\ 20'\ 15'') : (25^0\ 12'\ 10'') = 60^0\ 7'\ 33''$

$25^0 \,.\, 60 = 1500$
$15^0 = 900'$
$920'$
$12' \,.\, 60^0 = 720$
200
$10'' \,.\, 60 = 10$
$190' : 25$
$25^0 \,.\, 7' = 175$
$15' = 900''$
$915''$
$12' \,.\, 7' = 84$
831
$10'' \,.\, 7 = 1\ 10'''$
$(829''\ 50''') : 25$
$25^0 \,.\, 33'' = 825$
$4''\ 50''' = 290''''$
$12' \,.\, 33'' \ldots\ldots$

Man sieht, dass diese Divisionsmethode der Division complexer Grössen in unserer Buchstabenrechnung vollständig ähnlich ist.

VI. Das Ausziehen der Quadratwurzeln.

Vor Allem ist zu bemerken, dass die griechischen Mathematiker dasjenige, was wir Quadratwurzel nennen, stets bezeichnen als Seite eines Quadrats von gegebener Fläche. Das Ausziehen der Quadratwurzel hat bei Theon weit mehr einen geometrischen als arithmetischen Charakter. Aus folgendem Beispiel, welches Theon's Commentar (v. ed. Bas. pag. 44 und 45) entnommen ist, kann man das Verfahren kennen lernen:

Theon stellt sich die Aufgabe: aus einem gegebenen quadratischen Raum (*χωρίον τετράγωνον*) die genäherte Seite (*τὴν σύνεγγυς τετραγωνικὴν πλευράν*) desselben zu finden. Ist die Seite (Wurzel) des Quadrats rational, so ist das Verfahren aus dem vierten Satz des zweiten Buches der Elemente Euklids klar. Ist aber ein quadratischer Raum gegeben, der keine in der Länge rationale Seite (*πλευρὰν μήκει ῥητήν*) hat, so kann diese durch Annäherung berechnet werden:

Es seien 4500 Grade (*μοιραί*) der Inhalt des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 1).

Zuerst suche man das der Zahl 4500 nächstliegende Quadrat mit rationaler Seite. Dieses ist $4489 = \alpha\zeta$ und seine Seite $\alpha\eta = 67^0$. Ziehe vom Quadrat $\alpha\gamma = 4500$ das Quadrat $\alpha\zeta = 4489$ ab. Der dadurch entstehende Rest 11^0 ($= 660'$) wird durch das Gnomon $\beta\zeta\delta$ dargestellt. Da in diesem Gnomon die beiden gleichen Rechtecke $\vartheta\zeta$ und $\zeta\varkappa$ enthalten sind, und beide die Seite des Quadrats $\alpha\zeta$ zur Seite haben, so dividire man mit der doppelten Seite dieses Quadrats, d. i. mit 134 in obigen Rest von $660'$; der sich ergebende Quotient $4'$ ist die andere Seite $\eta\varkappa$ ($= \varepsilon\vartheta$) jener Rechtecke. Der Inhalt eines jeden derselben beträgt also $268'$. Das Quadrat $\zeta\lambda$, dessen Seite $4'$ ist, enthält $16''$. Folglich ist der Inhalt des Quadrats $\alpha\lambda = 4489^0\,536'\,16'' = 4497^0\,56'\,16''$. Wird diese Zahl vom Inhalt des Quadrats $\alpha\gamma$ abgezogen, so kommt

als Rest $2^0\ 3'\ 44'' = 7424''$, was den Inhalt des Gnomons $\beta\lambda\delta$ vorstellt. In diesem Gnomon sind wieder zwei gleiche Rechtecke mit den Seiten $\vartheta\lambda = \varkappa\lambda = 67^0\ 4'$ enthalten. Dividiren wir mit dem doppelten Werth dieser Seite, d. i. mit $134^0\ 8'$ in die $7424'$ so ergibt sich als Quotient $55''$, was die zweite Seite $\vartheta\beta$ $(= \varkappa\delta)$ der letzten beiden Rechtecke ist. Wir erhalten dann $7377''\ 20'''$ als Summe der Flächen der einander gleichen Rechtecke $\beta\lambda$ und $\lambda\delta$, jedes derselben ist also gleich $3688''\ 40'''$; es bleibt als Rest $46''\ 40'''$, welches nahedem Quadrat $\lambda\gamma$ gleichkommt, dessen Seite $55''$ beträgt. Folglich ist die Seite des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$ gleich $67^0\ 4'\ 55''$. Schliesslich stellt Theon die allgemeine Regel auf:

„Wenn wir die Quadratwurzel irgend einer Zahl suchen, so nehmen wir zuerst die Wurzel der nächstliegenden Quadratzahl, dann verdoppeln wir diese und dividiren damit in den Rest, nachdem wir denselben in erste Sechzigstel aufgelöst haben, und subtrahiren das Quadrat des Quotienten; dann lösen wir wieder den Rest in zweite Sechzigtheile auf und dividiren ihn durch die doppelten Grade und Minuten, so erhalten wir nahe die gesuchte Zahl für die Seite des quadratischen Raums." (Im Original: *Καὶ καθόλον ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινὸς τὴν τετραγωνικὴν πλευράν, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευράν, εἶτα ταύτην διπλασιάζοντες καὶ περὶ τὸν γενόμενον ἀριθμὸν μερίζοντες τὸν λοιπὸν ἀριθμόν, ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστά, ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένου ἀφαιροῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα ἑξηκοστὰ καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ χωρίου ἀριθμόν.*)

Man sieht hieraus, dass dem Wesen nach dieses Verfahren mit unserer Methode der Quadratwurzelausziehung vollständig übereinstimmt.

Höhere Wurzeln als Quadratwurzeln verstanden die Griechen nicht auszuziehen.

VII. Die Berechnung der Sehnentafeln.

Wie schon oben erwähnt wurde, theilte Ptolemäus den Durchmesser des Kreises in 120 gleiche Theile. Um ein Dreieck aufzulösen, wurde um dasselbe ein Kreis beschrieben. Die Dreiecksseiten werden dadurch Sehnen des Kreises, und es wird nun bestimmt, wie viele Theile des Durchmessers sie enthalten.

Dazu diente der Satz: „Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sehnen der doppelten Gegenwinkel.“ Also (Fig. 2):

$$AB : AC : BC = \text{chord}\,2C : \text{chord}\,2B : \text{chord}\,2A$$

Im Almagest befindet sich eine Tafel, welche für alle Bögen von 0^0 bis 180^0 in Intervallen von 30 zu 30 Minuten die Längen der zugehörigen Sehnen, ausgedrückt in Theilen des Radius, angibt. Die Art und Weise, auf welche Ptolemäus zur Berechnung dieser Tafeln gekommen ist, setzt er so auseinander:

Die Sehne eines Bogens von 60^0 ist gleich dem Radius des zugeh. Kreises . . . . . $= 60^p\ 0'\ 0''$

Die Sehne eines Bogens von 180^0 ist gleich dem Durchmesser des zugeh. Kreises . . . . $= 120^p$

Die Sehne von 36^0 ergibt sich folgendermassen: Ist der Radius eines Kreises $= 1$, und x die Seite des eingeschriebenen regulären Zehnecks, so ist bekanntlich:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0{,}61804.$$

Ist (Fig. 3) der Radius $DG = 1$; $DB \perp AG$; $DE = \frac{1}{2}$ so folgt:

$$BE^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};\quad BE = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Mache nun $EZ = EB$, so folgt:

$$DZ = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = 0{,}61804 = x.$$

Ist der Durchmesser des Kreises $= 1$, so ist die Seite dieses Zehnecks $= 0{,}30902$; ist der Durchmesser $= 120$, so wird folglich diese Zehnecksseite $= 37{,}0824 = 37^p\ 4'\ 55''$.

Hierauf benützt Ptolemäus den schon durch die Elemente Euklids bekannten Satz: „Das Quadrat der Seite des eingeschriebenen

regulären Fünfecks ist gleich dem Quadrat der Seite des demselben Kreis eingeschriebenen regulären Zehnecks, plus dem Quadrat des Radius." Ist nun dieser Radius DB = 60^p, so hat man:

$$BZ^2 = DZ^2 + BD^2 = (37^p\ 4'\ 55'')^2 + 3600 = 4975^p\ 4'\ 14''$$

also $BZ = 70^p\ 32'\ 3'' = \text{chord}\ 72^0$

ferner $\text{chord}\ 90^0 = \sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2} = 84{,}852 = 84^p\ 51'\ 10''$

Die Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks ist die Sehne zu 120°; ist r der Radius des diesem Dreieck umschriebenen Kreises, so ist:

$\text{chord}\ 120^0 = r\sqrt{3} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}$, und wenn r = 60 ist,

$\text{chord}\ 120^0\ 60\sqrt{3} = 103{,}9230 = 103^p\ 55'\ 23''$

Hat man den Werth der Sehne eines Bogens α, so findet man den Werth derjenigen Sehne, welche zum Supplement dieses Bogens gehört, durch den pythagoräischen Satz. Es ist:

$$\text{chord}^2(180 - \alpha) = \text{chord}^2\,180 - \text{chord}^2\,\alpha$$

also $\text{chord}\,(180 - \alpha) = \sqrt{(120 + \text{chord}\,\alpha)\,(120 - \text{chord}\,\alpha)}$; aus dieser Formel kann man also mittelst der bekannten Werthe der Sehnen von 36° und 72° die Sehnen der Bögen von 144° und 108° finden.

Alsdann wird der Satz über das Sehnenviereck abgeleitet. Die Ableitung des Ptolemäus ist in alle unsere Lehrbücher der Elementargeometrie übergegangen. Der Satz des Ptolemäus über das Sehnenviereck gefiel nämlich dem Geometer Simson so gut, dass er ihn in seine englische Ausgabe der Elemente Euklid's aufnahm, und von da aus nahm er seinen Weg in alle Lehrbücher der elementaren Mathematik. Dieser Satz ist bekanntlich durch folgende Relation ausgedrückt (Fig. 4):

$$AG \cdot BD = AB \cdot GD + AD \cdot BG$$

Aus dieser allgemeinen Relation ergibt sich:

1°.) Sind die beiden Diagonalen des Sehnenvierecks zugleich Durchmesser des Kreises, so hat man:

$$(\text{chord}\ 180)^2 = \text{chord}^2\,AB + \text{chord}^2\,(180 - AB)$$

was wir schon oben fanden.

2°.) Schneiden sich diese beiden Durchmesser rechtwinkelig, so werden die vier Seiten des Sehnenvierecks einander gleich, also:

$\text{chord}^2 180 = 2 \,.\, \text{chord}^2 90$, woraus $\text{chord}\, 90^0 = \frac{120}{\sqrt{2}} = 84^p 51' 10''$, wie wir schon oben fanden.

3°.) Ist AG der Durchmesser, so erhält die allgemeine Relation, angewendet auf Fig. 5, folgende Gestalt:

$$120 \,\text{chord}\,(AB + AD) = \text{chord}\, AB \,\text{chord}\,(180 - AD) + \text{chord}\, AD \,\text{chord}\,(180 - AB)$$

[hieraus ergibt sich sofort:

$$120 \,.\, 2 \sin\tfrac{1}{2}(AB + AD) = 2 \sin\tfrac{1}{2} AB \,.\, 2 \cos\tfrac{1}{2} AD + 2 \sin\tfrac{1}{2} AD \,.\, 2 \cos\tfrac{1}{2} AB$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}(AB + AD) = \frac{\sin\frac{1}{2} AB \cos\frac{1}{2} AD + \cos\frac{1}{2} AB \sin\frac{1}{2} AD}{\text{Radius}},$$

worin man sofort eine bekannte Formel unserer modernen Trigonometrie erkennt.]

4°.) Ist AD der Durchmesser des Kreises Fig. 6, so hat man:

$$AD \,.\, BG = AG \,.\, BD - AB \,.\, DG \text{ oder}$$

$$120 \,.\, \text{chord}\,(AG - AB) = \text{chord}\, AG \,.\, \text{chord}\,(180 - AB) - \text{chord}\, AB \,\text{chord}\,(180 - AG)$$

[folgl. $60 \,.\, \sin\frac{1}{2}(AG - AB) = \sin\frac{1}{2} AG \,.\, \cos\frac{1}{2} AB - \sin\frac{1}{2} AB \cos\frac{1}{2} AG$, aber hierin ist $BG = \text{chord}\,(180 - AB - DG)$ und aus der obigen Gleichung folgt: $BG = \frac{AG \,.\, BD - AB \,.\, DG}{AD}$ folgl.:

$$\text{chord}\,(180 - AB - DG) = \frac{\text{chord}\,(180 - DG) \,.\, \text{chord}\,(180 - AB) - \text{chord}\, AB \,\text{chord}\, DG}{120}$$

also $60 \,.\, \cos\frac{1}{2}(AB + DG) = \cos\frac{1}{2} DG \cos\frac{1}{2} AB - \sin\frac{1}{2} AB \sin\frac{1}{2} DG$, was die Entwickelung unserer Formel $\cos(\alpha + \beta)$ ist.]

5°.) Ist in Fig. 5 $BG = GD$, so ist auch $AB = AD$; aus der allgemeinen Gleichung für das Sehnenviereck ergibt sich dann für diesen Fall:

$$BD = \frac{2 \,.\, AB \,.\, BG}{120} = \frac{2 \,\text{chord}\, AB \,.\, \text{chord}\,(180 - AB)}{120}$$

$$\text{chord}\, 2\,AB = \frac{2 \,\text{chord}\, AB \,.\, \text{chord}\,(180 - AB)}{120}$$

folgl. Radius . $\sin AB = 2 \sin \frac{1}{2} AB \,.\, \cos \frac{1}{2} AB$ wiederum eine bekannte Formel.

6°.) Ist Fig. 7: $DE = DG = DB$ und $DZ \perp AG$ so ist $EZ = ZG$ und $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE$, folglich ist auch $AB = AE$;

$$AG : DG = DG : ZG;\; ZG = \frac{1}{2} EG = \frac{1}{2}(AG - AE) = \frac{1}{2}(AG - AB)$$

$$120 : \text{chord}\, \frac{1}{2} BG = \text{chord}\, \frac{1}{2} BG : \frac{1}{2}(AG - AB)$$

$$(\text{chord}\, \tfrac{1}{2} BG)^2 = 60 \,.\, (AG - AB)$$

$$= 60 \,.\, \big(120 - \text{chord}\,(180 - BG)\big)$$

$$= \frac{1}{2} \,.\, (120)^2 \,.\, \left(1 - \frac{\text{chord}\,(180 - BG)}{120}\right)$$

oder allgemein: $\text{chord}\, \frac{1}{2}\alpha = 120 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\text{chord}\,(180 - \alpha)}{120}}}$

also auch: $\text{chord}\, \alpha = 120 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\text{chord}\,(180 - 2\alpha)}{120}}}$

$$= 120 \sqrt{\frac{1}{2}} \,.\, \sqrt{1 - \frac{2 \,.\, 60 \,\sin(90 - \alpha)}{120}} = 120 \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos\alpha}}$$

$$2 \,.\, 60 \sin \frac{1}{2}\alpha = 120 \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos\alpha}}$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$ ebenfalls eine Relation der modernen Trigonometrie*).

---

*) In Theon's Commentar befinden sich zwei Figuren, an welchen Delambre vier weitere Formeln der modernen Trigonometrie ableitete, für welche jedoch die Alten kein Aequivalent hatten. Ich theile diese Ableitung hier mit, da ich sie in keinem unserer Lehrbücher der Trigonometrie gefunden habe.

Ist (Fig. 8) BZ und $GH \perp AE$; $GN \parallel AE$; arc $AB = \alpha$; arc $GM = \beta$; D das Centr. d. Kr. dessen Rad. $DB = 1$, so folgt:

Durch Anwendung der vorstehenden Relationen und durch fortwährendes Halbiren erhielt Ptolemäus die Werthe der Sehnen bis zu derjenigen des Bogens $0^0\ 45'$ herab. Nachdem er nämlich auf die oben gezeigte Weise die Sehnen der Bögen von 90^0, 60^0, 36^0 und 12^0 in Theilen des Durchmessers (diesen in 120 gleiche Theile getheilt) gefunden hatte, erlangte er durch Halbirung die Sehnen von 45^0, 30^0, 18^0 und 6^0; sowie durch weiteres Halbiren die von $22^0\ 30'$, 15^0, 9^0 und 3^0; ferner von $7^0\ 30'$ und $4^0\ 30'$ etc.; mittelst des nach ihm benannten Satzes erhielt er dann die Sehnen von $15^0 + 9^0$ und von $15^0 - 9^0$; halbirt man die Sehne von 6^0, so kommt die von 3^0, dann die von $1^0\ 30'$ und von $0^0\ 45'$.

Für die Sehne von $1^0\ 30'$ findet Ptolemäus den Werth $1^p\ 34'\ 15''$; für die Sehne von $0^0\ 45'$ den Werth $0^p\ 47'\ 8''$.

$$BN = BZ - GH = \sin\alpha - \sin\beta = GB.\sin NGB = GB.\sin AEB = GB\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$= \text{chord (arc BG)}.\sin\frac{1}{2}(a-\beta) = 2\sin\frac{1}{2}(180-\alpha-\beta).\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 2\cos$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\text{also } \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

$$\text{Ferner ist } DZ + DH = \cos\alpha + \cos\beta = GB.\cos BGN = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Ist (Fig. 9) Sehne $AT \parallel XG$, der Durchmesser BB' des Kreises stehe senkrecht zu diesen beiden Sehnen, der Radius sei wieder $= 1$, D das Centr. des Kr.; $GI \perp AT$, so hat man, wenn arc $AB = \alpha$; arc $BG = \beta$ gesetzt wird:

$AI = AG.\cos GAT = AZ + ZI$; nun ist aber $AG = \text{chord}(AB+BG) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; $\cos GAT = \cos AGX = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; $AZ = \sin(180-\alpha) = \sin\alpha$;

$$ZI = HG = \sin\beta$$

$$\text{folgl.: } \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

$$\text{Ebenso ist } GI = AG.\sin GAI = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$GI = DH + DZ = \cos\beta + \cos(180-\alpha) = \cos\beta - \cos\alpha$$

$$\text{folgl.: } \cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Um die Sehne von 1^0 zu erhalten, beweist Ptolemäus (v. Al. pag. 34 und 35, Ausg. v. Halma) den Satz: „Das Verhältniss der Sehnen ist kleiner als das Verhältniss ihrer zugehörigen Bögen."

Hier folgt der Beweis dieses Satzes. In demselben ist ganz genau der Gedankengang des Ptolemäus, jedoch mit moderner Bezeichnung, dargestellt.

Es sei (Fig. 10) $BG > AB$ und wir haben zu zeigen, dass:

$$\text{chord } BG : \text{chord } AB < \text{arc } BG : \text{arc } AB$$

Halbire $\angle ABG$ durch BD so ist $GE > AE$, weil $BG > AB$ ist. Fälle von D die Senkrechte DZ auf AG und beschreibe aus D mit DE als Radius den Bogen HL, so wird dieser Bogen die Verlängerung von DZ in T schneiden.

$\triangle DEZ$ ist kleiner als der Kreissektor DTE, folglich:

$$\triangle DEZ : \text{Sekt } DEH < \text{Sekt } DTE : \text{Sekt } DEH$$

auch ist $\text{Sekt } DEH < \triangle DEA$ folgl.:

$$\triangle DEZ : \text{Sekt } DEH > \triangle DEZ : \triangle DEA$$

aber $\triangle DEZ : \triangle DEA = EZ : AE$ und $\text{Sekt } DTE : \text{Sekt } DEH = ET : HE$

folglich ist $EZ : AE < ET : HE$ also auch:

$$(EZ + AE) : AE < (ET + HE) : HE \text{ d. i.}$$

$$AZ : AE < HT : HE \text{ und folglich auch:}$$

$$2\,AZ : AE < 2\,HT : HE$$

aber $\triangle DZA \cong \triangle DZG$, woraus folgt, dass $2\,AZ = AG$; ferner ist

$$2\,HT = \text{arc } HTL$$

mithin: $AG : AE < \text{arc } HTL : HE$

also auch: $(AG - AE) : AE < (HTL - HE) : HE$

d. i.: $EG : AE < EL : HE$

oder auch: $EG : AE < \text{arc } BG : \text{arc } AB$ da die Bögen EL und HE dasselbe Verhältniss haben wie die Bögen BG und AB, aber:

$$EG : AE = BG : AB$$

folglich: $BG : AB < \text{arc } BG : \text{arc } AB$;

Ist nun arc BG $= 1^0$ und arc AB $= \frac{3}{4}{}^0$, so hat man:

chord 1^0 : chord $\frac{3}{4}{}^0 < 1^0 : \frac{3}{4}{}^0$ woraus chord $1^0 < \frac{4}{3}$. chord $\frac{3}{4}{}^0$

also chord $1^0 < \frac{4}{3}\,(0^p\ 47'\ 48'') < 1^p\ 2'\ 50''\ 40'''$

chord $90'$: chord $1^0 < 90 : 60$ oder chord 1^0 : chord $90' > 2 : 3$

also chord $1^0 > \frac{2}{3}$ chord $90'$

chord $1^0 > \frac{2}{3}\,(1^p\ 34'\ 15'')$

chord $1^0 > 1^p\ 2'\ 50''\ 0'''$

Ptolemäus nahm nun an: chord $1^0 = 1^p\ 2'\ 50''$.

Aus der Sehne von 1^0 ergibt sich mit Hilfe des Halbirungstheorems (6^0.): chord $30' = 0^p\ 31'\ 25''$.

Nun hatte Ptolemäus alle Mittel zur Berechnung seiner Sehnentafeln an der Hand. Diese Sehnentafel (*Κανόνιον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν*) enthält die Sehnen aller Winkel von 0^0 bis 180^0 in Intervallen von $30'$ zu $30'$. Ich gebe hier einige Theile derselben, sammt der Uebertragung in moderne Ziffern, da man dadurch am besten Einsicht in ihre Einrichtung gewinnt. Die erste Spalte derselben ist mit *περιφερειῶν* d i. Bögen überschrieben (den Kreisumfang nannten die griechischen Geometer *περίμετρος*, mit welchem Wort sie überhaupt den Umfang jeder Figur bezeichneten.)

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.									Tafel der Sehnen im Kreis.								
περιφε-ρειῶν.		εὐθειῶν.			ἑξηκοστῶν.				Bögen		Sehnen			Dreissigstel der Differenzen			
μοιρῶν.		μ.	π.	δ.	μ.	π.	δ.	τ	Grade	Minuten	Theile des Durchm.	′	″	Theile des Durchm.	′	″	‴
ō	λ″	ō	λα	κε	ō	α	β	ν	0	30	0	31	25	0	1	2	50
α	ō	α	β	ν	ō	α	β	ν	1	0	1	2	50	0	1	2	50
α	λ″	α	λδ	ιε	ō	α	β	ν	1	30	1	34	15	0	1	2	50
κγ	ō	κγ	νε	κζ	ō	α	α	λγ	23	0	23	55	27	0	1	1	33
κγ	λ″	κδ	κς	ιγ	ō	α	α	λ	23	30	24	26	13	0	1	1	30
κδ	ō	κδ	νς	νη	ō	α	α	κς	24	0	24	56	58	0	1	1	26
κζ	λ″	κη	λα	κ	ō	α	α	ō	27	30	28	31	20	0	1	1	0
κη	ō	κϑ	α	ν	ō	α	ō	νς	28	0	29	1	50	0	1	0	56
κη	λ″	κϑ	λβ	ιη	ō	α	ō	νβ	28	30	29	32	18	0	1	0	52
μα	ō	μβ	α	λ	ō	ō	νη	μη	41	0	42	1	30	0	0	58	48
μα	λ″	μβ	λ	νδ	ō	ō	νη	μβ	41	30	42	30	54	0	0	58	42
μβ	ō	μγ	ō	ιε	ō	ō	νη	λς	42	0	43	0	15	0	0	58	36
μζ	ō	μζ	να	ō	ō	ō	νζ	λδ	47	0	47	51	0	0	0	57	34
μζ	λ″	μη	ιϑ	μζ	ō	ō	νζ	κζ	47	30	48	19	47	0	0	57	27
μη	ō	μη	μη	λ	ō	ō	νζ	κα	48	0	48	48	30	0	0	57	21
νε	λ″	νε	νβ	κς	ō	ō	νε	λγ	55	30	55	52	26	0	0	55	33
νς	ō	νς	κ	ιβ	ō	ō	νε	κε	56	0	56	20	12	0	0	55	25
π	ō	οζ	η	ε	ō	ō	μη	γ	80	0	77	8	5	0	0	48	3
π	λ″	οζ	λβ	ς	ō	ō	μζ	νβ	80	30	77	32	6	0	0	47	52
πα	ō	οζ	νς	β	ō	ō	μζ	μα	81	0	77	56	2	0	0	47	41
πγ	ō	οϑ	λ	νβ	ō	ō	μς	νη	83	0	79	30	52	0	0	46	58
πγ	λ″	οϑ	νδ	κα	ō	ō	μς	μζ	83	30	79	54	21	0	0	46	47
πδ	ō	π	ιζ	με	ō	ō	μς	λς	84	0	80	17	45	0	0	46	36
ριϑ	λ″	ργ	λϑ	λζ	ō	ō	λα	λβ	119	30	103	39	37	0	0	31	32
ρκ	ō	ργ	νε	κγ	ō	ō	λα	ιη	120	0	103	55	23	0	0	31	18
ρλβ	ō	ρϑ	λζ	λβ	ō	ō	κε	κς	132	0	109	37	32	0	0	25	26
ρλβ	λ″	ρϑ	ν	ιε	ō	ō	κε	ια	132	30	109	50	15	0	0	25	11
ρνς	λ″	ριζ	κϑ	η	ō	ō	ιβ	μ	156	30	117	29	8	0	0	12	40
ρνζ	ō	ριζ	λε	κη	ō	ō	ιβ	κδ	157	0	117	35	28	0	0	12	24

Da der Werth des Radius $60^p = 216000''$ beträgt, so war die Genauigkeit grösser als das Doppelte der Genauigkeit, welche wir erzielen, wenn wir den Radius zu 100000 annehmen und die sin auf fünf Dezimalstellen berechnen.

Diese Genauigkeit war offenbar für die Erfordernisse der alten Astronomie mehr als hinreichend.

Folgendes Beispiel gibt einen Vergleich zwischen den ptolemäischen Sehnentafeln und unseren modernen Sinustafeln:

Drückt man den in der Sehnentafel angegebenen Werth der Sehne von 28^0 in einem Dezimalbruch aus, so kommt:

chord $28^0 = 29{,}0305555 \ldots\ldots$ Theile von den 120 Theilen des Durchmessers;

also $\frac{1}{2}$ chord $28^0 = 14{,}5152777 \ldots\ldots$; wird der Halbmesser zu 1 angenommen,

so ist $\frac{1}{2}$ chord $28^0 = 0{,}241921219 \ldots\ldots$

Aus unseren trigonometrischen Tafeln findet man sin $14^0 = 0{,}241921 \ldots\ldots$

VIII Die ebene Trigonometrie.

An keiner Stelle des Almagest befinden sich besondere Regeln zur Berechnung der ebenen Dreiecke. Wir können aber aus verschiedenen Beispielen in diesem Werk ersehen, welches Verfahren Ptolemäus zur Berechnung der ebenen Dreiecke anwendete, und dieses lässt sich folgendermassen systematisch zusammenstellen:

Um aus den Seiten h, a und b (Fig. 11) eines rechtwinkeligen Dreiecks dessen Winkel zu berechnen, denke man sich dasselbe auch unterhalb der Kathete b gezeichnet, und alsdann aus dem Scheitel des Winkels α mit der Hypotenuse h als Radius einen Kreisbogen beschrieben; zu der dadurch entstandenen Figur bilde man eine ähnliche Figur, in welcher die der h homologe Seite = 60 (d. i. gleich dem Radius der ptolemäischen Sehnentafeln) ist; die der Seite 2a homologe Seite sei mit 2s bezeichnet, letztere ist die in den Sehnentafeln bei dem gesuchten Winkel 2α stehende Sehne. Man hat nun die Proportion:

$$h : 2a = 60 : 2s \text{ also } 2s = \text{chord } 2\alpha = \frac{120 . a}{h}$$

hieraus rechnet man den Werth von chord 2α, und mit Hilfe der Sehnentafeln findet man den zugehörigen Winkel 2α.

[Nun ist aber $\frac{\text{chord } 2\alpha}{120} = \frac{2s}{120} = \sin\alpha$, folglich ergibt sich aus der eben angegebenen Methode des Ptolemäus sofort unsere Relation $\sin\alpha = \frac{a}{h}$].

Sollte ein spitzer Winkel aus den beiden Katheten berechnet werden, so wurde vorerst mit Hilfe des pythagoräischen Satzes die Hypotenuse gesucht und alsdann das soeben angeführte Verfahren eingeschlagen. Durch die von Johannes Müller (Regiomontanus 1470) eingeführte Tangente sind wir dieses Umweges überhoben.

Wenn ein schiefwinkeliges Dreieck zu berechnen ist, so zerlege man dasselbe durch ein Höhenperpendikel in zwei rechtwinkelige.

Sollten die Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten berechnet werden, so hatte man ein Verfahren, welches unsere sogenannte Cosinusregel ersetzte und woraus sich dieselbe auch leicht ergibt. Es ist nämlich nach einem Theorem, das sich schon in Euklids Elementen findet: (Fig. 12) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, wenn x die Projektion von c auf b ist. Daraus folgt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b . \frac{c . \text{chord } 2\zeta}{120} = b^2 + c^2 - 2bc . \frac{\text{chord } (180 - 2\alpha)}{120}$$

woraus folgt:

$$\frac{\text{chord } (180 - 2\alpha)}{120} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ [hieraus kommt sofort $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$]

Hat man aus chord $(180 - 2\alpha) = \frac{60(b^2 + c^2 - a^2)}{bc}$ den Winkel α berechnet, so ergeben sich die beiden anderen Winkel aus den Proportionen: $a : c = \text{chord } 2\alpha : \text{chord } 2\gamma$; $a : b = \text{chord } 2\alpha : \text{chord } 2\beta$.

Ich theile hier aus dem Almagest ein sehr lehrreiches Beispiel für die Bestimmung der Winkel eines Dreiecks aus seinen

drei Seiten mit. Im 7ten Capitel des sechsten Buches wird die Grösse der Verfinsterung der Sonnenscheibe bei einer Sonnenfinsterniss berechnet. Die hierauf bezügliche Stelle (Al. Ausg. v. Halma T. I, pag. 421—423) führe ich hier wörtlich an, nebst der deutschen Uebersetzung (Fig. 13):

*Ἔστω δὴ πρῶτον ἕνεκεν τῶν ἡλιακῶν ἐκλείψεων, ὁ μὲν τοῦ ἡλίου κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε, ὁ δὲ κατὰ τὸ μέσον ἀπόστημα τῆς σελήνης ὁ ΑΖΓΗ περὶ κέντρον τὸ Θ, τέμνων τὸν τοῦ ἡλίου κύκλον κατὰ τὰ Α καὶ Γ σημεῖα. Καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΕΘΗ, ὑποκείσθω τὸ τέταρτον ἐκλελοιπέναι τῆς διαμέτρου τῆς ἡλιακῆς, ὥστε τὴν μὲν ΖΔ τοιούτων εἶναι $\overline{\gamma}$ *) οἵων ἐστὶν ἡ ΒΔ διάμετρος $\overline{\iota\beta}$, τὴν δὲ ΖΗ τῆς σελήνης διάμετρον τῶν αὐτῶν $\overline{\iota\beta}$ κ′ ἔγγιστα, κατὰ τὸν τῶν $\overline{\iota\varepsilon}$ μ′ πρὸς τὰ $\overline{\iota\varsigma}$ μ′ λόγον, διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὴν ΕΘ συνάγεσθαι τῶν αὐτῶν $\overline{\Theta}$ ι′. Καὶ τῶν περιμέτρων ἄρα κατὰ τὸν τοῦ $\overline{\alpha}$ πρὸς τὰ $\overline{\gamma}$ η′ λ″ λόγον, ἡ μὲν τοῦ ἡλιακοῦ κύκλου γίνεται τμημάτων $\overline{\lambda\zeta}$ μβ′, ἡ δὲ τοῦ σεληνιακοῦ τῶν αὐτῶν $\overline{\lambda\eta}$ μς′.*

Es sei vorerst wegen der Sonnenfinsternisse ABGD der um sein Centrum E beschriebene Kreis der Sonne, AZGH derjenige des Mondes, in seiner mittleren Entfernung um sein Centrum T beschrieben, welcher den Kreis der Sonne in den Punkten A und G schneidet. Nach Verbindung von B E T und H nehmen wir an, dass das Viertel des Sonnendurchmessers verfinstert sei, so dass ZD drei Theile seien, von derselben Art, als der Durchmesser BD 12 enthält, und der Durchmesser ZH des Mondes sehr nahe 12^{p} 20′, nach dem Verhältniss 15 40′ zu 16 40′, und daraus folgt, dass ET gleich 9 10′ ist. Und zufolge des Verhältnisses von 1 zu 3^{p} 8′ 30″ wird der Umfang der Sonnenscheibe 37^{p} 42′ Theile und (der Umfang) der Mondsscheibe 38 46′ Theile derselben Art.

Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ὅλων ἐμβαδῶν, ἐπειδήπερ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν περίμετρον πολ-

Ebenso wird von den gesammten Flächen, weil der Radius multiplizirt mit dem Umfang

*) Im Al. sind die im Text vorkommenden Zahlen oben mit einem horizontalen Strich ¯ versehen, um sogleich von den Buchstaben unterschieden werden zu können.

λαπλασιασθεῖσα δύο ἐμβαδὰ τοῦ κύκλου ποιεῖ, τὸ μὲν τοῦ ἡλιακοῦ κύκλου συναχθήσεται μοιρῶν ριγ ς′, τὸ δὲ τοῦ τῆς σελήνης τῶν αὐτων ριΘ λβ′. Τούτων δὴ οὕτως ἐχόντων, προκείσθω εὑρεῖν πόσων ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔΓΖ ἐμβαδὸν, οἵων ἐστὶ τὸ ὅλον τοῦ ἡλιακοῦ κύκλου ἐμβαδὸν ιβ. Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΑΕ καὶ ΑΘ, καὶ ΓΕ καὶ ΓΘ, καὶ ἔτι ἡ ΑΚΓ κάθετος.

Ἐπεὶ οὖν οἵων ἐστὶν ἡ ΕΘ εὐθεῖα ϑ ι′, τοιούτων ἑκατέρα μὲν τῶν ΑΕ καὶ ΕΓ ὑπόκειται ς, ἑκατέρα δὲ τῶν ΑΘ καὶ ΘΓ τῶν αὐτῶν ς ι′, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία, ἐὰν τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΘΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ, τουτέστι τὰ β καὶ ἑξηκοστὰ β παραβάλωμεν παρὰ τὴν ΕΘ, ἕξομεν τὴν τῶν ΕΚ καὶ ΚΘ ὑπεροχὴν, τῶν αὐτῶν ἑξηκοστῶν ιγ γ″ ὥστε καὶ τὴν μὲν ΕΚ συνάγεσθαι δ κη′, τὴν δὲ ΚΘ τῶν αὐτῶν δ μβ′, διὰ τοῦτο δὲ καὶ ἑκατέραν τῶν ΑΚ καὶ ΚΓ, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ, τῶν αὐτῶν δ ἐγγιστα. Τούτοις δ'ἀκολούθως καὶ τὸ μὲν τοῦ ΑΕΓ τριγώνου ἐμβαδὸν ἕξομεν ιζ νβ′, τὸ δὲ τοῦ ΑΘΓ τῶν αὐτῶν ιη μη′. Πάλιν ἐπεὶ οἵων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ διάμετρος ιβ, ἡ δὲ ΖΗ ὁμοίως ιβ κ′, τοιούτων καὶ ἡ ΑΓ συνάγεται η, καὶ οἵων μέν

zwei Flächenräume des Kreises gibt, die Fläche der Sonnenscheibe 113^{p} 6′ und diejenige des Mondes 119 32′ Theile derselben Art betragen. Da sich nun dieses so verhält, liege vor zu finden, wie viele Theile die Fläche ADGZ enthält, während die Fläche der ganzen Sonnenscheibe 12 enthält. Ziehe AE und AT, GE und GT und noch die Senkrechte AKG.

Da nun AE und EG jede zu 6 Theilen angenommen wurden, von derselben Art als die Gerade ET 9 10′ und jede der Geraden AT und TG 6 10′ enthält, und da der Winkel bei K ein rechter ist, so werden wir, wenn wir die Zahl 2^{p} 2′, welche angibt, um wie viel das Quadrat von TA dasjenige von AE übertrifft, durch ET dividiren, als Differenz von EK und KT $13\frac{1}{8}$ sechzigstel erhalten, so dass EK 4^{p} 28′ und KT 4 42′ betragen wird, und jede der Geraden AK und KG, da sie gleich sind, näherungsweise 4 dieser Theile. Folglich werden wir als Fläche des Dreiecks AEG 17^{p} 52′, und als diejenige von ATG 18^{p} 48′ derselben Art haben. Wiederum, weil der Durchmesser BD 12 Theile beträgt, und ebenso ZH 12 Theile 20 und AG deren 8, und der Durchmesser BD deren 120, so wird AG 80 Theile der-

ἐστιν ἡ ΒΔ διάμετρος ρκ, τοιούτων ἡ ΑΓ ἔσται π, οἵων δὲ ἡ ΖΗ διάμετρος ρκ, τοιούτων οξ ν′· καὶ τῶν ἐπ αὐτῆς ἄρα περιφερειῶν, ἡ μὲν ΑΔΓ τοιούτων ἐστὶν πγ λζ′ οἵων ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τξ, ἡ δὲ ΑΖΓ τοιούτων π νβ′, οἵων ὁ ΑΖΓΗ κύκλος τξ. Ὥστ′ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς λόγος ἐστὶ τῶν κύκλων πρὸς τὰς περιφερείας, καὶ τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν πρὸς τὰ τῶν ὑπὸ τὰς περιφερείας τομέων, καὶ τὸ μὲν τοῦ ΑΕΓΔ τομέως ἐμβαδὸν ἔξομεν τοιούτων κς ις′, οἵων ἐδείχθη τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ριγ ς′, τὸ δὲ τοῦ ΑΘΓΖ τομέως τῶν αὐτῶν κς νά, ἐπεὶ καὶ τὸ τοῦ ΑΗΓΖ κύκλου τῶν αὐτῶν ἦν ριΘ λβ′. Ἐδέδεικτο δὲ καὶ τὸ μὲν τοῦ ΑΕΓ τριγώνου ἐμβαδὸν τῶν αὐτῶν ιζ νβ′, τὸ δὲ τοῦ ΑΘΓ ὁμοίως ιη μη′. Καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ μὲν τοῦ ΑΔΓΚ τμήματος ἐμβαδὸν ἔξομεν η κδ′, τὸ δὲ τοῦ ΑΖΓΚ τῶν αὐτῶν η γ′. Καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓΔ περιεχόμενον ἐμβαδὸν τοιούτων ἐστὶ ις κζ′, οἵων τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ὑπόκειται ριγ ς′. Ὥστε καὶ οἵων ἐστὶ τὸ τοῦ ἡλιακοῦ κύκλου ἐμβαδὸν ιβ, τοιούτων τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐκλείποντος ἐστὶν α Κ δ″ ἔγγιστα.

selben Art betragen, und wenn der Durchmesser ZH 120 Theile enthält, so wird AG deren $77^{p}\ 50'$ enthalten; und von den über dieser (Sehne) beschriebenen Bögen beträgt ADG $83^{0}\ 37'$ von den 360 Graden des Kreises ABGD, und der andere (Bogen) AZG $82^{0}\ 52'$ derselben Art, als der Kreis AZGH 360 enthält. Da nun die Kreisumfänge zu den Bögen dasselbe Verhältniss haben wie die Flächen derselben (Kreise) zu den Flächen der von diesen Bögen begrenzten Sektoren, so werden wir als Fläche des Sektors AEGD 26 16′ Theile haben, von derselben Art, als die Fläche des Kreises ABGD $113^{p}\ 6'$ besitzt, wie wir gezeigt haben, und die Fläche des Sektors ATGZ wird 26 51′ der Theile enthalten, deren der Kreis AHGZ 119 32′ enthält. Es wurde aber auch gezeigt, dass die Fläche des Dreiecks AEG 17 52′ dieser Theile enthält, und jene des Dreiecks ATG $18^{p}\ 48'$. Wir werden also für die Fläche des Segments ADGK $8^{p}\ 24'$ übrig haben, und für jene des Segments AZGK $8^{p}\ 3'$. Die ganze Fläche AZGD wird also 16 27′ Theile derselben Art betragen, als der Kreis ABGD $113^{p}\ 6'$ enthält, so dass, während die Fläche der Sonnenscheibe 12 ist, der verfinsterte Theil derselben sehr nahe $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ beträgt.

Mittelst der Bezeichnungsweisen der modernen Mathematik gestaltet sich diese Darstellung folgendermassen:

Der Durchmesser der Sonnenscheibe wird in 12 gleiche Theile getheilt. Um den Durchmesser x der Mondscheibe in eben solchen Theilen auszudrücken, nimmt Ptolemäus den Gesichtswinkel, unter welchem die Sonnenscheibe erscheint, zu $31' 20''$ und den Gesichtswinkel der Mondscheibe zu $33' 20''$ an, und man findet aus der Proportion $31' 20'' : 33' 20'' = 12 : x$; $x = 12{,}766 = 12^p 46'$ als Durchmesser des Mondes. (Ptolemäus gibt $12^p 20'$ dafür an, was jedenfalls ungenau ist.)

Ptolemäus nimmt dann an, dass der vierte Theil des Durchmessers der Sonnenscheibe verfinstert sei, so dass $DZ = 3$ Längeneinheiten zu setzen ist. Nach Ptolemäus ist also:

$$\begin{array}{l} TZ = 6^p 10' \text{ (sollte eigentlich } 6^p 23' \text{ heissen)} \\ EZ = 3 \\ \hline ET = 9^p 10' \text{ (eigentlich } 9^p 23') \end{array}$$

Um den Umfang der Sonnenscheibe, sowie der Mondsscheibe auszudrücken, nimmt Ptolemäus das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie wie $1 : 3^p 8' 30''$ an (letztere Zahl würde dem Näherungswerth 3,1416 entsprechen).

Man hat also die Proportion:

$$1^p : 3^p 8' 30'' = 12 : \text{Umf. d. S.}$$

$$\text{also Umfang d. S.} = 37^p, 7 = 37^p 42'$$

ferner ist nach Ptolemäus: $1 : 3^p 8' 30'' = 12{,}333 : \text{Umf. d. M.}$

$$\text{also Umf. d. M.} = 38^p 46'$$

[eigentlich $1 : 3^p 8' 30'' = 12{,}766 : \text{Umf. d. M.}$, also Umf. d. M. $= 40^p$, $106 = 40^p 6' 21''$]

Da man den Flächenraum des Kreises erhält, wenn man seinen halben Radius mit dem Umfang multiplizirt, so ist:

die Fläche der Sonnenscheibe $= 37{,}7 . 3 = 113^p 6'$

die Fläche der Mondscheibe $= 119^p 32'$ (nach Ptol.)

Ptolemäus sucht nun die Abschnitte TK und KE der Centrale TE zu berechnen. Dazu schlägt er ein Verfahren ein, das sich nirgends bei den griechischen Geometern vor ihm findet. Es ist folgendes:

$$TK^2 = TA^2 - AK^2$$
$$EK^2 = AE^2 - AK^2$$

folglich $TK - EK = \frac{(TA + AE)(TA - AE)}{ET}$

hieraus ergibt sich nun:

$$TK - EK = \tfrac{73}{330}$$

u. oben gibt Ptol. $ET = TK + EK = 9\tfrac{1}{6}$

also wird $TK = 4\tfrac{229}{330} = 4^p\,42'$ (sehr nahe)

$EK = 4\tfrac{26}{55} = 4^p\,28'$

$AK = \sqrt{AE^2 - KE^2} = 4^p$ (näherungsweise)

$\triangle AEG = AK \,.\, KE = 17^p\,52'$

$\triangle ATG = AK \,.\, TK = 18^p\,48'$

Zur Bestimmung des $\angle AED$ hat man in dem rechtwinkeligen $\triangle AKE$:

$$\text{chord (arc ADG)} = \frac{120 \,.\, AK}{AE} = 80^p$$

aus den Sehnentafeln ergibt sich hierzu

arc $ADG = 83^0\,37'\,14''$, also wird $\angle AED = 41^0\,48'\,37''$.

Ebenso hat man im rechtwinkeligen $\triangle ATK$:

$$\text{chord (arc AZG)} = \frac{120 \,.\, AK}{AT} = \frac{120 \,.\, 4}{6^p\,10'} = 77^p\,50'\,16''\,26'''$$

und hierzu findet man aus den Sehnentafeln

arc $AZG = 80^0\,52'\,46''$, folglich ist:

$\angle ATZ = 40^0\,26'\,23''$. [Ptol. gibt für arc AZG den Werth $82^0\,52'$ an, was jedenfalls unrichtig ist.]

Ferner ist: $360 : (83^0\,37'\,14'') = 113{,}1 :$ Sekt AEG, woraus:

Sekt AEG	= 26,268
$-\ \triangle$ AEG	= 17,8667
Segment ADG	= 8,4013

$360 : (80^0\,53') = 119{,}5333 :$ Sekt ATG, also Sekt ATG = 26,856

$\triangle$ ATG	= 18,8
Segment AZG	= 8,056
„ ADG	= 8,401
	16,457

Der verfinsterte Theil der Sonnenscheibe ist also 16,457; diese Zahl in Zwölfteln der Sonnenscheibe ausgedrückt

$$= \frac{12 \,.\, 16{,}457}{113{,}1} = 1{,}746 = 1^{\mathrm{p}}\, 45'.$$

IX. Die sphärische Trigonometrie.

Satz 1. Werden (Fig. 14) an zwei Gerade AB und AG zwei andere Gerade BE und GD gezogen, welche sich in Z schneiden, so ist das Verhältniss AG : AE aus den Verhältnissen GD : ZD und BZ : BE zusammengesetzt.

Ziehe EH || GD so hat man:

$$\mathrm{AG} : \mathrm{AE} = \mathrm{GD} : \mathrm{EH} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{GD} : \mathrm{ZD} \\ \mathrm{ZD} : \mathrm{EH} \end{matrix} \right\}$$

aber $\mathrm{DZ} : \mathrm{EH} = \mathrm{BZ} : \mathrm{BE}$

$$\text{folglich auch: } \mathrm{AG} : \mathrm{AE} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{GD} : \mathrm{ZD} \\ \mathrm{BZ} : \mathrm{BE} \end{matrix} \right.$$

Der Ausdruck „ein Verhältniss ist aus zwei Verhältnissen zusammengesetzt" ist so zu verstehen, dass das Produkt der Exponenten der letzteren Verhältnisse den Exponenten des ersten Verhältnisses gibt.

Satz 2. Das Verhältniss von GE : EA ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen GZ : ZD und BD : BA (Fig. 15).

Ziehe AH || EB so ist:

$$\mathrm{GE} : \mathrm{EA} = \mathrm{GZ} : \mathrm{ZH} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{GZ} : \mathrm{ZD} \\ \mathrm{ZD} : \mathrm{ZH} \end{matrix} \right.$$

es gilt aber auch die Proportion: $\mathrm{ZD} : \mathrm{ZH} = \mathrm{BD} : \mathrm{BA}$, also auch:

$$\mathrm{GE} : \mathrm{EA} = \mathrm{GZ} : \mathrm{ZH} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{GZ} : \mathrm{ZD} \\ \mathrm{BD} : \mathrm{BA} \end{matrix} \right.$$

Satz 3. Nimmt man auf einer Kreisperipherie drei Punkte A, B und G so an, dass sowohl arc AB als arc BG kleiner ist als der Halbkreis, so verhält sich die Sehne des doppelten Bogens AB zur Sehne des doppelten Bogens BG wie AE zu EG (Fig. 16).

Ziehe sowohl AZ als GH senkrecht zum Durchmesser BD, so ist:

$$AZ : GH = AE : EG, \text{ aber } AZ = \frac{1}{2} \text{ chord } 2AB; \; GH = \frac{1}{2} \text{ chord } 2BG$$

$$\text{also: chord } 2AB : \text{chord } 2BG = AE : EG$$

Satz 4. Wenn der ganze Bogen AG und das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens AB zur Sehne des doppelten Bogens BG gegeben ist, so ist jeder der Bögen AB und BG auch gegeben (Fig. 17).

Ziehe den Radius AD; ferner DZ $\perp$ AE, so ist der Winkel ADZ bekannt (da der Bogen AG gegeben ist); mithin ist auch der Winkel bei A bekannt; auch kennt man den Radius DA, und AZ als die Hälfte der durch die Sehnentafeln gegebenen AG. Aus $\triangle AZD$ kann man mittelst des pythagoräischen Satzes DZ bestimmen. Nach Satz 3 ergibt sich aus der Proportion chord 2 AB : chord 2 BG = AE : EG das Verhältniss AE : EG; da nun auch AE + EG = AG gegeben ist, so kann man AE und EG finden. Nun ist ZE = AE − AZ; jetzt kann DE mittelst des pythagoräischen Satzes aus $\triangle DZE$ bestimmt werden, und alsdann auch der Winkel EDZ; folglich ist auch der ganze Winkel ADB und somit die Bögen AB und BG bekannt.

Satz 5 (Fig. 18). Sei D der Mittelpunkt des Kreises ABG, die drei Punkte A B G seien auf dem Umfang so angenommen, dass jeder der Bögen AB und AG kleiner ist als der Halbkreis; ferner sei DA und GB (welche sich in E schneiden) gezogen, so hat man:

$$\text{chord } 2AG : \text{chord } 2AB = EG : EB$$

Denn zieht man GH und BZ senkrecht auf ED, so ist:

$$GH : BZ = EG : EB;$$

nun ist aber $GH = \frac{1}{2}$ chord 2 AG; $BZ = \frac{1}{2}$ chord 2 AB, womit die Richtigkeit der Behauptung dargethan ist.

Satz 6. Daraus folgt, dass, wenn der Bogen GB allein, und das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens GA zur Sehne des doppelten Bogens AB gegeben ist, auch der Bogen AB gefunden werden kann.

(Fig. 19) Denn zieht man den Halbmesser BD und DZ $\perp$ BG, so ist $<$BDZ, welcher die Hälfte des Bogens BG zum Mass hat, also auch das rechtwinkelige $\triangle$ BDZ bekannt. Da aber das Verhältniss EG : EB gegeben ist, so ist auch $<$ EDZ des rechtwinkeligen $\triangle$ DEZ, mithin auch $<$EDB gegeben, so dass auch der Bogen AB gegeben ist.

Satz 7. (Fig. 20) Es seien auf der Oberfläche einer Kugel Bögen grösster Kugelkreise beschrieben; die beiden Bögen BE und GD, welche zwischen den Bögen AB und AG gezogen sind, schneiden sich in Z (jeder dieser Bögen ist kleiner als der Halbkreis angenommen); nun behaupte ich, dass folgende Proportion stattfindet:

$$\text{chord } 2\,GE : \text{chord } 2\,EA = \begin{cases} \text{chord } 2\,GZ : \text{chord } 2\,ZD \\ \text{chord } 2\,BD : \text{chord } 2\,BA \end{cases}$$

Denn ist H der Kugelmittelpunkt und seien die Verbindungslinien HB, HZ und HE gezogen, welche die Sehnen AD, GD und GA beziehungsweise in den Punkten T, K und L schneiden, so müssen diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, weil sie sich zugleich in zwei Ebenen befinden, nämlich in der Ebene des $\triangle$ AGD und in der Ebene des Kreises BZE, folglich hat man nach Satz 2:

$$GL : LA = \begin{cases} GK : KD \\ TD : TA \end{cases}$$

Nach Satz 3 hat man: $GL : LA = \text{chord } 2\,GE : \text{chord } 2\,EA$;

$$GK : KD = \text{chord } 2\,GZ : \text{chord } 2\,ZD$$

ferner nach Satz 5: $TD : TA = \text{chord } 2\,BD : \text{chord } 2\,BA$, wodurch die Richtigkeit obiger Behauptung klar ist.

[Aus der Relation: $\dfrac{\text{chord } 2\,GE}{\text{chord } 2\,EA} = \dfrac{\text{chord } 2\,GZ}{\text{chord } 2\,ZD} \cdot \dfrac{\text{chord } 2\,BD}{\text{chord } 2\,BA}$

folgt die Produktengleichung:

$$\text{chord } 2\,GE \,.\, \text{chord } 2\,ZD \,.\, \text{chord } 2\,BA = \text{chord } 2\,EA \,.\, \text{chord } 2\,GZ \,.\, \text{chord } 2\,BD$$

oder: $\sin GE \,.\, \sin ZD \,.\, \sin BA = \sin EA \,.\, \sin GZ \,.\, \sin BD$]

Satz 8.

$$\text{chord } 2\,AG : \text{chord } 2\,AE = \begin{cases} \text{chord } 2\,DG : \text{chord } 2\,DZ \\ \text{chord } 2\,BZ : \text{chord } 2\,BE \end{cases}$$

Ptolemäus gibt keinen Beweis für diesen Satz, sondern sagt nur, dass er auf ähnliche Weise wie der vorige bewiesen werde. Theon leitet ihn in seinem Commentar zum Almagest aus dem vorigen Satz ab: Verlängere (Fig. 21) die Bögen GA und GD, bis sie sich in C schneiden, so hat man nach Satz 7:

$$\text{chord } 2\,CA : \text{chord } 2\,AE = \begin{cases} \text{chord } 2\,CD : \text{chord } 2\,DZ \\ \text{chord } 2\,BZ : \text{chord } 2\,BE \end{cases}$$

aber chord 2 CA = chord 2 AG; chord 2 CD = chord 2 DG, durch Substitution dieser Werthe ergibt sich die Behauptung.

[Aus dieser Behauptung folgt ebenso wie beim vorigen Satz die wichtige Relation: $\sin AG \cdot \sin ZD \cdot \sin EB = \sin AE \cdot \sin GD \cdot \sin BZ$. Schneidet man also die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks EZG durch eine Transversale AB, so sind die Produkte der Sinus der überspringenden Abschnitte einander gleich.]

Die beiden Sätze 7 und 8 bilden bei Ptolemäus das Fundament für die Auflösung der sphärischen Dreiecke. Ptolemäus betrachtet zwar nicht alle Fälle, welche beim sphärischen Dreieck möglich sind, jedoch wollen wir zeigen, dass sich wirklich alle Fälle, welche vorkommen können, mit Hilfe dieser beiden Sätze erledigen lassen.

Das rechtwinkelige sphärische Dreieck.

In einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ABC eine Relation aufzustellen zwischen:

1.) der Hypotenuse a, einer Kathete b und dem Winkel B.

Verlängere (Fig. 22) die andere Kathete c und die Hypotenuse a, so dass arc BD = arc BI = 90°, und ziehe durch I und D einen grössten Kreis auf der Kugelfläche. Der Schnittpunkt M dieses Kreises und der verlängerten Kathete b ist der Pol der Kathete c, also ist auch MA = MD = 90°. Nach Satz 8 hat man nun:

$$\text{chord } 2\,MD : \text{chord } 2\,ID = \begin{cases} \text{chord } 2\,MA : \text{chord } 2\,b \\ \text{chord } 2\,a : \text{chord } 2\,BI \end{cases}$$

Aber chord 2 MD, chord 2 MA und chord 2 BI ist der Durchmesser der Kugel, also = 120; und chord 2 ID = chord 2 B, folglich geht diese Proportion über in:

$$\frac{120}{\text{chord } 2\,B} = \frac{120}{\text{chord } 2\,b} \cdot \frac{\text{chord } 2\,a}{120}$$

[führt man in dieser Gleichung statt der Sehnen die sinus ein und setzt 2r anstatt 120, so folgt die bekannte Relation unserer sphärischen Trigonometrie: $r \cdot \sin b = \sin a \cdot \sin B$]

2.) der Hypotenuse und den beiden Katheten.

Aus Satz 8 ergibt sich:

$$\text{chord } 2\,BD : \text{chord } 2\,AD = \begin{cases} \text{chord } 2\,BI : \text{chord } 2\,CI \\ \text{chord } 2\,MC : \text{chord } 2\,MA \end{cases}$$

woraus: $120 \cdot \text{chord } 2\,CI = \text{chord } 2\,AD \cdot \text{chord } 2\,MC$

[hieraus ergibt sich die Relation: $r \cos a = \cos b \cdot \cos c$]

3.) den beiden Katheten b und c und dem Winkel B.

Zufolge des Satzes 7 ist:

$$\text{chord } 2\,MI : \text{chord } 2\,ID = \begin{cases} \text{chord } 2\,MC : \text{chord } 2\,b \\ \text{chord } 2\,c : \text{chord } 2\,BD \end{cases}$$

woraus man die Produktengleichung erhält:

$120 \cdot \text{chord } 2\,b \cdot \text{chord } 2\,MI = \text{chord } 2\,B \cdot \text{chord } 2\,c \cdot \text{chord } 2\,MC$

aus dieser Relation lässt sich die Kathete c direkt berechnen, wenn die andere Kathete b und Winkel B gegeben ist.

Wenn aber die Kathete c und eines der beiden andern Stücke gegeben ist, so kann man aus dieser Relation nur das Verhältniss chord 2 MC : chord 2 b oder das Verhältniss chord 2 MI : chord 2 B herleiten. In Satz 4 wurde aber gezeigt, dass, wenn die Summe zweier Bögen (hier MC + b oder MI + ID = 90°) und das Verhältniss der Sehnen dieser doppelten Bögen gegeben ist, jeder dieser Bögen selbst bestimmt werden kann.

[Unsere moderne Trigonometrie führt in diesem Fall viel schneller zum Ziel, denn aus obiger Produktengleichung ergibt sich:

$$2r \cdot 2 \sin b \cdot 2 \cos B = 2 \sin B \cdot 2 \sin c \cdot 2 \cos b$$

d. i.: $r \cdot \operatorname{tag} b = \operatorname{tag} B \cdot \sin c$]

4.) einer Kathete b und den Winkeln B und C.

Verlängere CI, sowie CM, so dass $CH = CL = 90^0$ und lege durch H und L einen grössten Kugelkreis, so folgt aus Satz 8:

$$\text{chord } 2\,GH : \text{chord } 2\,HL = \begin{cases} \text{chord } 2\,GI : \text{chord } 2\,MI \\ \text{chord } 2\,CM : \text{chord } 2\,CL \end{cases}$$

also: $120 \,.\, \text{chord } 2\,MI = \text{chord } 2\,HL \,.\, \text{chord } 2\,MC$

nun ist $MI = 90 - B$; $HL = \sphericalangle C$; $MC = 90 - b$, also stellt die letzte Relation wirklich eine Verbindung zwischen den Stücken b, B und C dar. [Man erhält daraus leicht die Gleichung unserer modernen Trigonometrie: $r \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \sin C$].

5.) der Hypotenuse, einer Kathete c und dem Winkel B.

Zufolge des Satzes 8 hat man:

$$\text{chord } 2\,c : \text{chord } 2\,AD = \begin{cases} \text{chord } 2\,a : \text{chord } 2\,CI \\ \text{chord } 2\,MI : \text{chord } 2\,MD \end{cases}$$

woraus sich die Produktengleichung ergibt:

$120 \,.\, \text{chord } 2\,c \,.\, \text{chord } 2\,CI = \text{chord } 2\,AD \,.\, \text{chord } 2\,a \,.\, \text{chord } 2\,MI$

ist nun c und a gegeben, so kann man aus dieser Gleichung MI und folglich auch $\sphericalangle B = 90 - MI$ berechnen. Soll aber c oder a gesucht werden, so ergibt sich aus dieser Gleichung nur das Verhältniss chord 2 a : chord 2 CI oder chord 2 c : chord 2 AD; die weitere Berechnung hat man dann mit Hilfe von Satz 4 zu führen.

[Die Relation unserer Trigonometrie $r \,.\, \text{tag } c = \cos B \,.\, \text{tag } a$, welche aus der letzten Produktengleichung folgt, ergibt das Gesuchte viel schneller.]

6.) der Hypotenuse und den beiden Winkeln B und C.

Zufolge des Satzes 7 hat man:

$$\text{chord } 2\,GL : \text{chord } 2\,LH = \begin{cases} \text{chord } 2\,GM : \text{chord } 2\,MI \\ \text{chord } 2\,CI : \text{chord } 2\,CH \end{cases}$$

also: $120 \,.\, \text{chord } 2\,GL \,.\, \text{chord } 2\,MI = \text{chord } 2\,LH \,.\, \text{chord } 2\,GM \,.\, \text{chord } 2\,CI$

nun ist: $GL = 90 - LH = 90 - C$;

$MI = 90 - B$; $GM = ID = \sphericalangle B$; $CI = 90 - a$,

wenn also Winkel B und C gegeben sind, so ergibt diese Produktengleichung sofort die Hypotenuse a; wenn aber die Hypotenuse und einer der beiden Winkel gegeben ist, so hat man zur weiteren Berechnung Satz 4 zu Hilfe zu nehmen.

[Aus dieser Produktengleichung ergibt sich leicht die Relation:

$$r \cdot \cos a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C.]$$

Von diesen sechs Fällen findet sich der vierte und der sechste im Almagest nicht behandelt, weil Ptolemäus nicht in den Fall kam, davon Gebrauch zu machen.

Das schiefwinkelige sphärische Dreieck.

Die Berechnung der schiefwinkeligen Dreiecke wurde von Ptolemäus durch das von einer Spitze des Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel auf die Berechnung der rechtwinkeligen Dreiecke zurückgeführt. Nur in zwei Fällen führt diese Methode nicht zum Ziel, nämlich wenn aus den drei Seiten die Winkel oder aus den drei Winkeln die Seiten bestimmt werden sollen.

Ist im $\triangle ABC$ der Winkel A aus den drei Seiten a, b und c zu bestimmen, so verlängere (Fig. 23) die diesen Winkel einschliessenden Seiten, so dass $AD = AI = 90^0$ wird; alsdann lege man durch D und I den Bogen eines grössten Kreises, welcher die verlängerte Dreiecksseite a in M schneidet.

Nach Satz 8 hat man nun die Proportion:

$$\text{chord } 2\,AD : \text{chord } 2\,BD = \begin{cases} \text{chord } 2\,AI : \text{chord } 2\,CI \\ \text{chord } 2\,MC : \text{chord } 2\,MB \end{cases}$$

woraus kommt:

$$\text{chord } 2\,CI \cdot \text{chord } 2\,MB = \text{chord } 2\,BD \cdot \text{chord } 2\,MC$$

in dieser Produktengleichung ist chord 2 CI und chord 2 BD bekannt, man erhält also das Verhältniss chord 2 MB : chord 2 MC, nun ist aber auch die Differenz a der Bögen MB und MC gegeben. Man kann also diese Bögen selbst finden. In dem bei D rechtwinkeligen sphärischen Dreieck MBD kennt man jetzt die Hypotenuse MB und die Kathete BD, man kann also nach dem zweiten der oben angeführten sechs Fälle die Kathete MD berechnen. Nach Satz 8 hat man dann:

$$\text{chord } 2\,MD : \text{chord } 2\,ID = \begin{cases} \text{chord } 2\,MB : \text{chord } 2\,a \\ \text{chord } 2\,b : \text{chord } 2\,AI \end{cases}$$

hieraus ergibt sich die Produktengleichung:

120 . chord 2 MD . chord 2 a = chord 2 A . chord 2 MB . chord 2 b

aus welcher chord 2 A bestimmt werden kann.

Mit Hilfe des Polardreiecks erhält man aus den drei Winkeln die drei Seiten.

Wir wollen nun diese Theoreme auf einige Beispiele anwenden:

In Buch I, Kap. XII des Almagest stellt Ptolemäus eine von Grad zu Grad berechnete Tafel der Deklinationen eines Quadranten der Ekliptik auf und setzt zuvor deren Berechnung auf folgende Weise auseinander:

Ἔστω γὰρ ὁ διὰ ἀμφοτέρων τῶν πόλων, τοῦ τε ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ διὰ μέσων τῶν ζωδίων, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τὸ μὲν τοῦ ἰσημερινοῦ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΓ, τὸ δὲ τοῦ διὰ μέσων τῶν ζωδίων τὸ ΒΕΔ, τὸ δὲ Ε σημεῖον ἡ κατὰ τὴν ἐαρινὴν ἰσημερίαν αὐτῶν τομή, ὥστε τὸ μὲν Β χειμερινὸν τροπικὸν εἶναι, τὸ δὲ Δ θερινόν· εἰλήφθω δὲ, ἐπὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας, ὁ πόλος τοῦ ΑΕΓ ἰσημερινοῦ, καὶ ἔστω τὸ Ζ σημεῖον· καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΕΗ περιφέρεια τοῦ διὰ μέσων τῶν ζωδίων κύκλου, τμημάτων ὑποκειμένη λ̄, οἵων ἐστὶ ὁ μέγιστος κύκλος τ̄ξ̄, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η γεγράφθω μεγίστου κύκλου περιφέρεια ἡ ΖΗΘ, καὶ προκείσθω τὴν ΗΘ δηλονότι εὑρεῖν. Προειλήφθω δὴ καὶ ἐνταῦθα καὶ καθόλου ἐπὶ πασῶν τῶν ὁμοίων

(Fig. 24) Es sei der die beiden Pole, nämlich des Aequators und der Ekliptik, verbindende Kreis ABGD, und der halbe Umfang des Aequators sei AEG, der der Ekliptik sei BED; und es sei E ihr Schnittpunkt zur Frühlingsnachtgleiche, so dass B der Wintersolstitialpunkt, D der Sommersolstitialpunkt ist; es werde auf dem Bogen ABG der Punkt Z als Pol des Aequators AEG genommen; man nehme den Bogen EH der Ekliptik zu 30°, deren 360 den Umfang des grössten Kreises bilden; durch die Punkte Z, H beschreibe man den Bogen des grössten Kreises ZHT, und es liegt uns offenbar vor HT zu finden. Es werde jetzt durchgängig für alle ähnlichen Entwickelungen angenommen,

δείξεων, ἵνα μὴ καθ' ἑκάστην ταυτολογῶμεν, ὅτι ὅταν τὰς πηλικοτήτας λέγωμεν περιφερειῶν ἢ εὐθειῶν, ὅσων εἰσὶ μοιρῶν ἢ τμημάτων, ἐπὶ μὲν τῶν περιφερειῶν, τοιούτων φαμὲν, οἵων ἡ τοῦ μεγίστου κύκλου περιφέρεια τμημάτων τξ, ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν, τοιούτων, οἵων ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος ρκ.

Ἐπεὶ τοίνυν ἐν καταγραφῇ μεγίστων κύκλων, εἰς δύο τὰς AZ καὶ AE περιφερείας γεγραμμέναι εἰσὶ δύο, ἥτε ZΘ καὶ ἡ EB, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ H, ὁ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ZA λόγος πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς AB, συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΘZ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΘH, καὶ τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς HE, πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς EB. Ἀλλ' ἡ μὲν τῆς ZA περιφερείας διπλῆ μοιρῶν ἐστιν ρπ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ρκ, ἡ δὲ τῆς AB διπλῆ, κατὰ τὸν συμπεφωνημένον ἡμῖν τῶν πγ πρὸς τὰ ια λόγον, μοιρῶν μξ μβ′ μ″, ἡ δ' ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων μη λά νε″· καὶ πάλιν ἡ μὲν τῆς HE περιφερείας διπλῆ μοιρῶν ξ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν

um nicht bei jeder dasselbe zu sagen, dass, wenn wir von Werthen der Bögen oder der Sehnen sprechen, diese aus einer gewissen Anzahl von Graden oder Abschnitten bestehen, welche auf den Bögen derart sind, dass der Umfang des grössten Kreises 360 hat, und auf den Sehnen derart, dass der Durchmesser des Kreises 120 enthält.

Weil nun bei der Beschreibung der grössten Kreise zu den beiden Bögen AZ und AE die Bögen ZT und EB, welche sich im Punkte H schneiden, gezogen sind, so wird das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens AZ zur Sehne des doppelten Bogens AB zusammengesetzt sein aus dem Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens TZ zu dem des doppelten Bogens TH, und aus dem Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens HE zu der des doppelten Bogens EB. Aber das Doppelte des Bogens ZA beträgt 180° und die zugehörige Sehne 120 Theile, das Doppelte des Bogens AB, nach dem oben von uns auseinandergesetzten*) Verhältniss 11 : 83 beträgt 47° 42′ 40″ und seine Sehne 48ᵖ 31′ 55″; ausserdem

*) Nach Ptolemäus beträgt die doppelte Schiefe der Ekliptik $\frac{11}{83}$ des Meridians, d. i. $\frac{11}{83} \cdot 360^0 = 47^0\,42'\,39''$ (Ptolemäus nimmt 40″ anstatt 39″ an) s. Al. Buch I Cap. X am Ende.

εὐθεῖα τμημάτων $\overline{ξ}$, ἡ δὲ τῆς *EB* διπλῆ μοιρῶν $\overline{ρπ}$, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων $\overline{ρκ}$· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ τῶν $\overline{ρκ}$ πρὸς τὰ $\overline{μη}$ $\overline{λα'}$ $\overline{νε''}$ λόγου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν $\overline{ξ}$ πρὸς τὰ $\overline{ρκ}$, καταλείπεται ὁ λόγος τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ZΘ* πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ΘH*, ὁ τῶν $\overline{ρκ}$ πρὸς τὰ $\overline{κδ}$ $\overline{ιε'}$ $\overline{νζ''}$· καὶ ἔστιν ἡ μὲν διπλῆ τῆς *ZΘ* περιφερείας μοιρῶν ρπ, ἡ δὲ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων $\overline{ρκ}$, καὶ ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν ἄρα τῆς *ΘH*, τῶν αὐτῶν ἐστιν $\overline{κδ}$ $\overline{ιε'}$ $\overline{νζ''}$· ὥστε καὶ ἡ μὲν διπλῆ τῆς *ΘH* περιφερείας, μοιρῶν ἐστιν $\overline{κγ}$ $\overline{ιϑ'}$ $\overline{νϑ''}$, αὐτὴ δὲ ἡ *ΘH* τῶν αὐτῶν $\overline{ια}$ $\overline{μ'}$ ἔγγιστα.

Πάλιν ὑποκείσθω ἡ *EH* περιφέρεια, μοιρῶν $\overline{ξ}$, ὥστε τῶν ἄλλων μενόντων τῶν αὐτῶν, τὴν μὲν διπλῆν τῆς *EH* γίνεσθαι μοιρῶν $\overline{ρκ}$, τὴν δὲ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖαν τμημάτων $\overline{ργ}$ $\overline{νε'}$ $\overline{κγ''}$· ἐὰν ἄρα πάλιν ἀπὸ τοῦ τῶν $\overline{ρκ}$ πρὸς τὰ $\overline{μη}$ $\overline{λα'}$ $\overline{νε''}$ λόγου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν $\overline{ργ}$ $\overline{νε'}$ $\overline{κγ''}$ πρὸς τὰ $\overline{ρκ}$, καταλειφθήσεται ὁ λόγος ὁ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ZΘ* πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ΘH*, ὁ τῶν $\overline{ρκ}$ πρὸς τὰ $\overline{μβ}$ $\overline{α'}$ $\overline{μη''}$· καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ZΘ*, τμημάτων $\overline{ρκ}$, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς *ΘH* τῶν

beträgt das Doppelte des Bogens HE 60^0 und seine Sehne 60^p; das Doppelte des Bogens EB ist 180^0 und seine Sehne 120^p; wenn wir nun von dem Verhältniss 120^p zu $48^p\ 31'\ 55''$ das Verhältniss 60 zu 120 wegnehmen*), so bleibt das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens ZT zur Sehne des doppelten Bogens TH, welches 120^p zu $24^p\ 15'\ 57''$ ist; und es beträgt das Doppelte des Bogens ZT 180^0, und die zugehörige Sehne 120^p, also ist die Sehne des doppelten Bogens TH $24^p\ 15'\ 57''$, so dass das Doppelte des Bogens TH $23^0\ 19'\ 59''$ enthält, und der Bogen TH sehr nahe $11^0\ 40'$.

Es werde nun der Bogen EH zu 60^0 angenommen, und bleibe alles Uebrige unverändert; das Doppelte des Bogens EH wird 120^0 und die zugehörige Sehne $103^p\ 55'\ 23''$; wenn wir wieder von dem Verhältniss 120 zu $48^p\ 31'\ 55''$ das von $103^p\ 55'\ 23''$ zu 120 wegnehmen, so bleibt das Verhältniss der Sehne des doppelten (Bogens) ZT zu der des doppelten (Bogens) TH, das ist 120 zu $42^p\ 1'\ 48''$ übrig. Es beträgt aber die Sehne des doppelten (Bogens) ZT 120^p, also ist die Sehne des doppelten

*) Unter dem Ausdruck „ein Verhältniss von einem andern wegnehmen" ist hier zu verstehen: ein Verhältniss durch ein anderes dividiren.

αὐτῶν ἔσται $\overline{\mu\beta}$ α′ μη″, καὶ ἡ μὲν διπλῆ ἄρα τῆς ΘΗ περιφερείας μοιρῶν ἐστι $\overline{\mu\alpha}$ ο′ ι″, ἡ δὲ ΘΗ τῶν αὐτῶν κ λ′ ϑ″, ἅπερ ἔδει δεῖξαι.

Bogens TH 42^{p} 1′ 48″ und folglich das Doppelte des Bogens TH, 41° 0′ 18″ und der Bogen TH 20° 30′ 9″, was wir zeigen wollten.

In vorstehender Aufgabe soll in einem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck aus der Hypotenuse und einem der anliegenden Winkel die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete berechnet werden. In unserer mathematischen Zeichensprache gestaltet sich das oben Auseinandergesetzte folgendermassen:

Wir setzen dabei arc HE $= \lambda$; arc HT $= \delta$; und den spärischen Winkel bei E (die Schiefe der Ekliptik) $= \varepsilon$ und nehmen vorerst an $\lambda = 30°$

$$\text{chord } 2\,\text{ZA} : \text{chord } 2\varepsilon = \begin{cases} \text{chord } 2\,\text{TZ} : \text{chord } 2\delta \\ \text{chord } 2\lambda : \text{chord } 2\,\text{EB} \end{cases}$$

Nun ist: chord 2 ZA $= 120^{p}$
chord $2\varepsilon = 48^{p}\ 31'\ 55''$
chord 2 TZ $= 120^{p}$
chord $2\lambda = 60^{p}$
chord 2 EB $= 120^{p}$

Mittelst dieser Werthe erhält man aus obiger Proportion:
chord $2\delta = 24^{p}\ 15'\ 57''$ und in den Sehnentafeln findet man hierzu:
$2\delta = 23°\ 19'\ 59''$
folgl.: $\delta = 11°\ 39'\ 59'',5$ (Ptol. gibt $11°\ 40'$ an)

Alsdann setzt Ptolemäus arc EH $= 60°$; aus den Sehnentafeln findet man chord $2\lambda = 103^{p}\ 55'\ 23''$; nun hat man die Proportion:

$$120 : 48^{p}\ 31'\ 55'' = \begin{cases} 120 : \text{chord } 2\delta \\ 103^{p}\ 55'\ 23'' : 120 \end{cases}$$

$$\text{also chord } 2\delta = \frac{48^{p}\ 31'\ 55''}{120} \cdot 103^{p}\ 55'\ 23''$$

$$= 0^{p}\ 24'\ 15''\ 57'''\ 30''''\ .\ 103^{p}\ 55'\ 23''$$

Der erste dieser beiden Faktoren ist für alle Längengrade der Ekliptik constant, und die angedeutete Multiplikation wird so vollzogen:

$24'$. 103^{p} =	41^{p}	$12'$				
$15''$. 103 =		25	$45''$			
$57'''$. 103 =		1	37	$51'''$		
$30''''$. 103 =				51	$30''''$	
$24'$. $55'$ =		$22'$				
$15''$. 55 =			$13''$	$45'''$		
$57'''$. 55 =				52	15	
$30''''$. 55 =					27	30^{v}
$24'$. $23''$ =			$9''$	12		
$15''$. 23 =				5	45	
$57'''$. 23 =					21	51
$30''''$. 23 =						11 30^{vi}

chord $2\delta = 42^{p}\ 1'\ 47''\ 38'''\ 19''''\ 32^{v}\ 30^{vi}$ (nach Angabe des Ptol. $42^{p}\ 1'\ 48''$);

aus den Sehnentafeln findet man dann arc $2\delta = 41^{0}\ 0'\ 18''$.

In der Formel $\text{chord}\ 2\delta = \frac{\text{chord}\ 2\varepsilon}{120} \cdot \text{chord}\ 2\lambda$ ist der erste Faktor constant und es kann also leicht die den verschiedenen Punkten der Ekliptik entsprechende Declination bestimmt werden; ferner erhält man aus letzter Formel sofort die Relation $\sin\delta = \sin\varepsilon \,.\, \sin\lambda$.

In Buch I Cap. XIII findet Ptolemäus die einem Punkte H der Ekliptik (dessen Länge $HE = \lambda$ gegeben ist) zugehörige Rektascension $ET = \alpha$ (Fig. 24). Er sagt:

. . . . . *Ἐκκείσθω τοίνυν ἡ προδεδειγμένη καταγραφὴ, καὶ δοθείσης πάλιν τῆς EH περιφερείας τοῦ λοξοῦ κύκλου, πρότερον μοιρῶν λ̄, δέον ἔστω τὴν EΘ τοῦ ἰσημερινοῦ περιφέρειαν εὑρεῖν· κατὰ ταυτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν, ὁ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ZB πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς BA λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ZH πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς HΘ, καὶ τοῦ τῆς*

. . . . . Es liege nun die vorhin angegebene Figur (v. Fig. 24) vor, und es sei wieder der Bogen EH der Ekliptik, vorerst zu 30^{0} gegeben, so soll man den Bogen ET des Aequators finden. Zufolge des vorhin angegebenen ist das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens ZB zur Sehne des doppelten Bogens BA zusammengesetzt aus dem Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens ZH zu der des doppelten Bogens

ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΘΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΕΑ· ἀλλ' ἡ μὲν τῆς ΖΒ περιφερείας διπλῆ μοιρῶν ἐστιν ρλβ ιζ′ κ″, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ρϑ μδ′ νγ″· ἡ δὲ τῆς ΑΒ περιφερείας διπλῆ μοιρῶν μζ μβ′ μ″, ἡ δ' ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων μη λα′ νε″· καὶ πάλιν ἡ μὲν τῆς ΖΗ περιφερείας διπλῆ μοιρῶν ρνς μ′ α″, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ριζ λα′ ιε″, ἡ δὲ τῆς ΗΘ μοιρῶν κγ ιϑ′ νϑ″, καὶ ἡ ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων κδ ιε′ νξ″· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ τῶν ρϑ μδ′ νγ″ πρὸς τὰ μη λα′ νε″ λόγου ἀφέλωμεν τὸν τῶν ριζ λα′ ιε″ πρὸς τὰ κδ ιε′ νξ″, καταλειφθήσεται ἡμῖν ὁ τῆς ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΘΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς ΕΑ λόγος, ὁ τῶν νδ νβ′ κς″ πρὸς τὰ ριζ λα′ ιε″· ὁ δ' αὐτὸς λόγος ἐστὶ καὶ τῶν νς α′ κε″ πρὸς τὰ ρκ· καὶ ἔστιν ἡ μὲν διπλῆ τῆς ΕΑ μοιρῶν ρπ, ἡ δ' ὑπ' αὐτὴν εὐθεῖα τμημάτων ρκ, καὶ ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν ἄρα τῆς ΘΕ τμημάτων τῶν αὐτῶν ἐστὶν νς α′ κε″· ὥστε καὶ ἡ μὲν διπλῆ τῆς ΘΕ περιφερείας ἔσται μοιρῶν νε μ′ ἔγγιστα, ἡ δὲ ΘΕ τῶν αὐτῶν κζ ν′.

HT und dem Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens TE zur Sehne des doppelten Bogens EA. Aber das Doppelte des Bogens ZB beträgt 132° 17′ 20″ und die zugehörige Sehne 109ᵖ 44′ 53″; das Doppelte des Bogens AB beträgt 47° 42′ 40″ und die zugehörige Sehne 48ᵖ 31′ 55″; zudem ist das Doppelte des Bogens ZH = 156° 40′ 1″ und seine Sehne 117ᵖ 31′ 15″, das Doppelte des Bogens HT beträgt 23° 19′ 59″ und die zugehörige Sehne 24ᵖ 15′ 57″; wenn wir aber von dem Verhältniss 109ᵖ 44′ 53″ zu 48ᵖ 31′ 55″ das Verhältniss 117ᵖ 31′ 15″ zu 24ᵖ 15′ 57″ wegnehmen, so bleibt uns das Verhältniss der Sehne des doppelten Bogens TE zu der des doppelten Bogens EA, welches 54ᵖ 52′ 26″ zu 117ᵖ 31′ 15″ ist; dasselbe Verhältniss hat aber auch 56ᵖ 1′ 25″ zu 120ᵖ; aber es beträgt das Doppelte des Bogens EA 180° und seine Sehne 120ᵖ, und die Sehne des doppelten Bogens TE beträgt 56° 1′ 25″; so dass das Doppelte des Bogens TE sehr nahe 55° 40′ und TE 27° 50′ betragen wird.

Es handelt sich hier darum, aus der Hypotenuse und einem derselben anliegenden Winkel die diesem Winkel anliegende Kathete zu bestimmen.

Es ist bekannt: arc EH = 30°

arc BZ = 90° — arc AB folglich:

arc 2 BZ = 132° 17′ 20″ . . . . . chord 2 BZ = 109ᵖ 44′ 53″

2 arc AB = 2 ε = 47° 42′ 40″ chord 2 ε = 48ᵖ 31′ 55″

arc ZH = 90° — arc HT = 90° — 11° 39′ 59″,5 = 78° 20′ 0″,5

arc 2 ZH = 156° 40′ 1″ chord 2 ZH = 117ᵖ 31′ 15″

arc 2 HT = arc 2 δ = 23° 19′ 59″; chord 2 δ = 24ᵖ 15′ 57″

Man hat nun:

$$\odot \text{ chord } 2\,ZB : \text{chord } 2\,BA = \begin{cases} \text{chord } 2\,ZH : \text{chord } 2\,\delta \\ \text{chord } 2\,\alpha : \text{chord } 2\,EA \end{cases}$$

und durch Substituirung der bezüglichen numerischen Werthe:

$$109^p\,44'\,53'' : 48^p\,31'\,55'' = \begin{cases} 117^p\,31'\,15'' : 24^p\,15'\,57'' \\ \text{chord } 2\alpha : 120^p \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\text{chord } 2\alpha = \frac{109^p\,44'\,53''.24^p\,15'\,57''.120}{117^p\,31'\,15''.48^p\,31'\,55''} = \frac{109^p\,44'\,53''}{117^p\,31'\,15''} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 120$$

$$= \frac{109^p\,44'\,53''}{1^p\,57'\,31''\,15'''}$$

also chord 2 α = 56ᵖ 1′ 53″ 51‴ (im Almagest steht 25″ anstatt 53″ 51‴, was offenbar unrichtig ist.)

$$2\alpha = 55^\circ\,40'\,13''$$

$$\alpha = 27^\circ\,50'$$

Man sieht hieraus, dass, wenn Ptolemäus aus der gegebenen Schiefe ε der Ekliptik und der gegebenen Länge λ eines Punktes auf derselben die Rektascension dieses Punktes finden wollte, er vorher die Declination δ dieses Punktes berechnet haben musste.

Obige Relation ⊙ lässt sich auch schreiben:

$$\text{chord } 2\,(90 - \varepsilon) : \text{chord } 2\,\varepsilon = \begin{cases} \text{chord } 2\,(90 - \delta) : \text{chord } 2\,\delta \\ \text{chord } 2\,\alpha : \text{chord } 180 \end{cases}$$

woraus:

$$\text{chord } 2\alpha = \frac{\text{chord } 180 \,.\, \text{chord } 2\,(90 - \varepsilon) \,.\, \text{chord } 2\,\delta}{\text{chord } 2\varepsilon \,.\, \text{chord } 2\,(90 - \delta)}$$

und hieraus kommt:

$$\sin\alpha = \frac{r \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \sin\delta}{\sin\varepsilon \,.\, \cos\delta} = r \,.\, \text{cotg}\,\varepsilon \,.\, \text{tag}\,\delta,$$

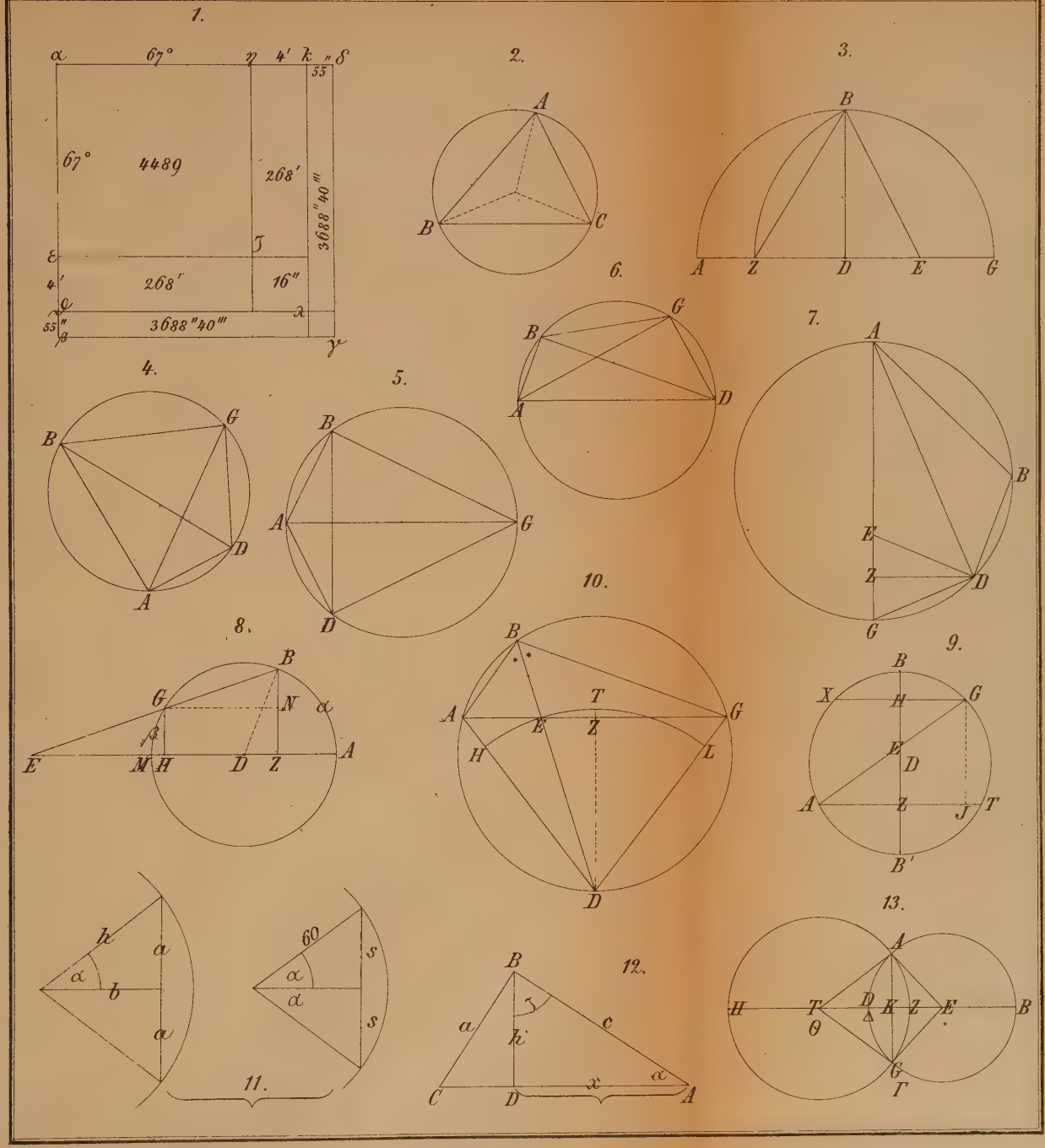
was eine bekannte Relation zwischen den drei Stücken α, ε, δ des bei T rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks EHT ist.

Letztere Formel für chord 2α lässt sich auch schreiben:

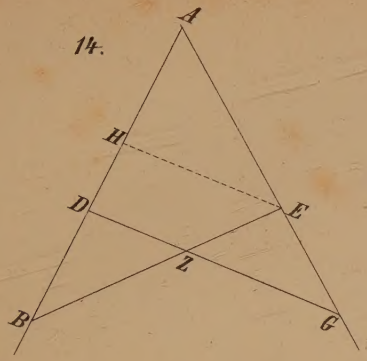
$$\text{chord } 2\alpha = \frac{\text{chord } 180 \,.\, \text{chord}\,(180 - 2\varepsilon)}{\text{chord } 2\varepsilon} \cdot \frac{\text{chord } 2\delta}{\text{chord}\,(180 - 2\delta)}$$

wie man sieht, ist der erste Faktor hier constant, wodurch die Berechnung der den verschiedenen Punkten der Ekliptik zugehörigen Rektascensionen erleichtert ist.

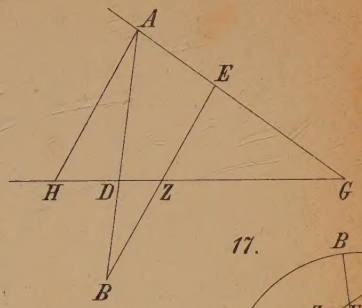
Durch diese Beispiele dürfte die Anwendung der oben entwickelten allgemeinen Methoden auf besondere Fälle hinreichend klar geworden sein, und da ich nun meine Absicht, einen Einblick in das Wesen der Trigonometrie der Griechen zu geben, erreicht zu haben glaube, so schliesse ich damit diese Abhandlung.


1.
α
67°
η
4′
k
δ
55″
67°
4489
268′
3688″40‴
ε
4′
268′
16″
ϱ
55″
3688″40‴
ϑ
γ
2.
A
B
C
3.
B
A
Z
D
E
G
4.
B
G
D
A
5.
B
A
G
D
6.
G
B
A
D
7.
A
B
E
Z
D
G
8.
B
G
N
α
β
E
M
H
D
Z
A
10.
B
A
T
G
E
Z
H
L
D
9.
B
X
H
G
E
D
A
Z
J
T
B′
11.
h
a
α
b
a
60
α
α
s
s
12.
B
a
ϑ
k
c
C
D
x
α
A
13.
A
H
T
D
K
Z
E
B
θ
G
Γ

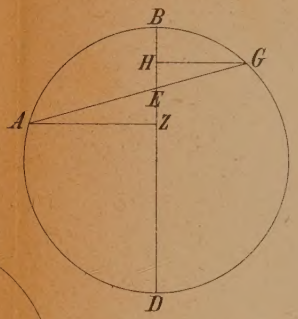
14.



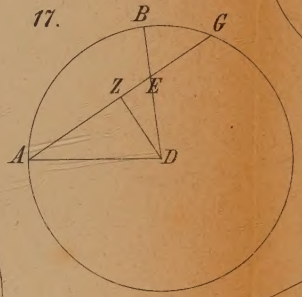
15.



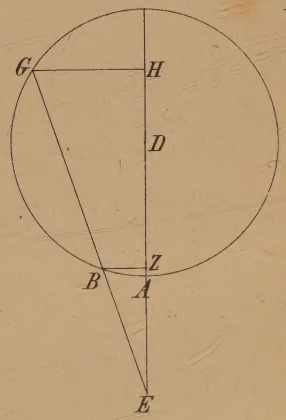
16.



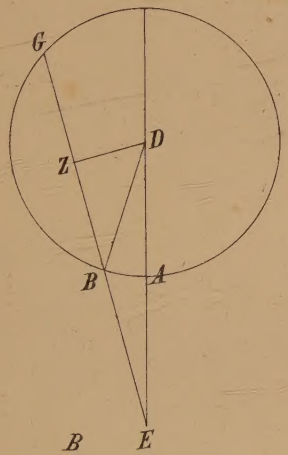
17.



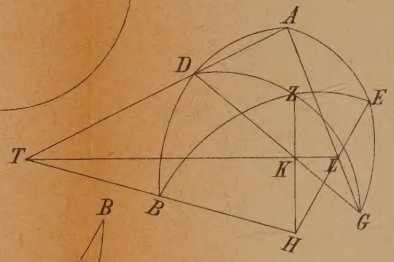
18.



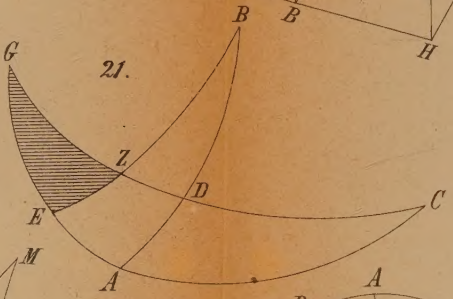
19.



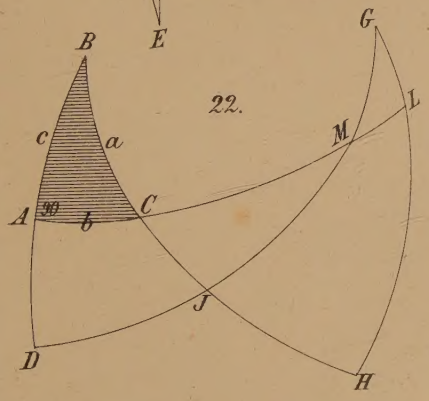
20.



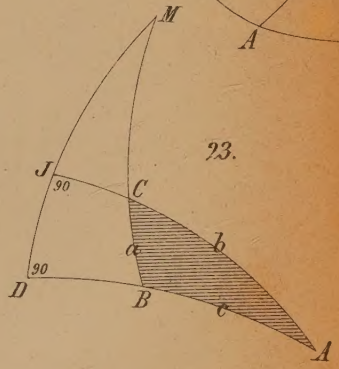
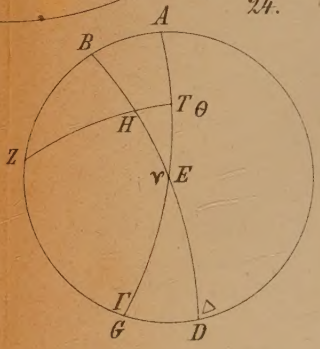
21.



22.



23.



24.